6 Die Hyperbel

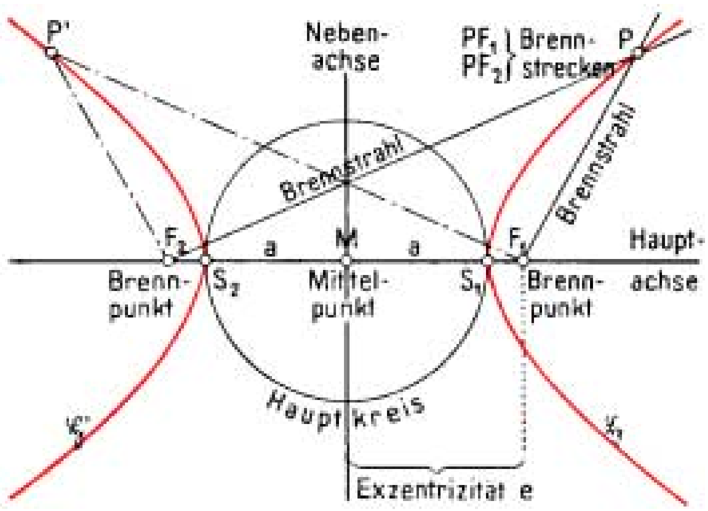

Abb. 6.1 [GüSt]

Die Hyperbel hat gegenüber den anderen Kegelschnitten eine Besonderheit: Sie zerfällt in zwei gleichartige, disjunkte Äste. Dies wird schon in der Beschreibung aus Meyers Konversations-Lexikon [Mey] aus dem Jahre 1876 deutlich:

„**Hyperbel**, in der Geometrie der Kegelschnitt, den man erhält, wenn die Schnittebene parallel zu zwei Erzeugenden der Kegelfläche liegt. Es werden dann diese beiden Erzeugenden in unendlicher, alle anderen in endlicher Entfernung geschnitten, und die Hyperbel erstreckt sich daher in der Richtung dieser zwei Erzeugenden ins Unendliche. Sie besteht aus zwei getrennten, symmetrischen Zweigen."

Wir werden nun die Eigenschaften der Hyperbel genauer untersuchen und dabei auch das zweite der klassischen Probleme lösen.

6.1 Geometrische Eigenschaften

Zu Beginn dieses Abschnitts werden wir die notwendigen Begriffe definieren.

Definition 6.0:

Eine **Hyperbel** entsteht, wenn ein Doppelkegel von einer Ebene geschnitten wird, welche zu zwei Mantelgeraden parallel verläuft.

Definition 6.1:

a) Die beiden hierbei entstandenen disjunkten Teile einer Hyperbel (einer in jedem der beiden Teilkegel) werden **Äste** genannt.

b) Die Verbindungsgerade der beiden Brennpunkte F_1 und F_2 einer Hyperbel heißt **Hauptachse**.

   Die Schnittpunkte S_1 und S_2 der Hyperbel mit der Hauptachse nennen wir **Scheitelpunkte**.

c) Wir bezeichnen den Mittelpunkt der Strecke F_1F_2 als **Mittelpunkt** M der Hyperbel.

   Der Abstand des Mittelpunkts von jedem der Scheitelpunkte wird im folgenden mit a bezeichnet.

d) Die **Nebenachse** wird definiert als die Lotgerade zur Hauptachse durch den Mittelpunkt.

e) Ist P ein Punkt der Hyperbel, so heißen die Geraden F_1P und F_2P **Brennstrahlen**, die entsprechenden Strecken **Brennstrecken**.

f) Wir bezeichnen ferner mit ...

   - **Hauptkreis** oder **Scheitelkreis** den Kreis um den Mittelpunkt M mit dem Radius a,
   - **Leitkreis** l_i den Kreis um den Brennpunkt F_i mit dem Radius 2a (i = 1, 2).

g) Die **Leitgeraden** einer Hyperbel sind definiert als der Schnitt der Ebene E mit den durch die Dandelinschen Kugeln festgelegten Ebenen E_1 und E_2.

Satz 6.2:

Für einen beliebigen Punkt P einer Hyperbel mit den Brennpunkten F_1 und F_2 gilt:

$$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a .$$

Umgekehrt liegen alle Punkte P, für die gilt: $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a$ auf einer Hyperbel.

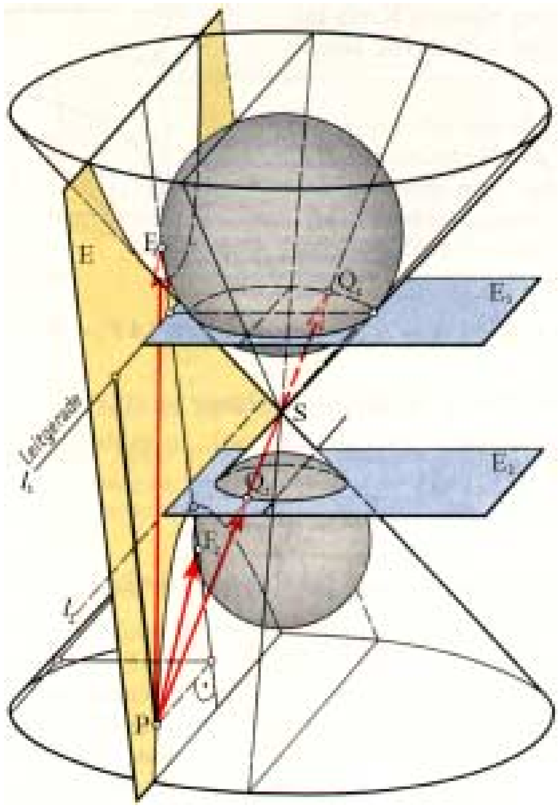

Abb. 6.2 [Hon*]

Beweis (siehe Abb. 6.2):

Sei eine Hyperbel als Schnitt einer Ebene E mit einem Doppelkegel gegeben. Sie besitze die Brennpunkte F_1 und F_2. Ferner seien E_1 bzw. E_2 diejenigen Ebenen senkrecht zur Kegelachse, in denen die Dandelinschen Kugeln die Mantelfläche berühren. Sei ferner S die Spitze des Doppelkegels.

Sei nun P ein beliebiger Punkt der Hyperbel. Die Gerade PS schneidet dann die Ebene E_1 im Punkt Q_1 und die Ebene E_2 in Q_2. Die Punkte Q_1 und Q_2 sind Elemente der Mantelfläche, liegen also auf den jeweiligen Dandelinschen Kugeln. Die Länge der Strecke Q_1Q_2 betrage 2a.

Da nun F_1, Q_1 bzw. F_2, Q_2 auf derselben Dandelinschen Kugel liegen, gilt für die Tangenten an diese Punkte durch P: $\overline{PF_1} = \overline{PQ_1}$ und $\overline{PF_2} = \overline{PQ_2}$. Somit:

$\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = \left|\overline{PQ_1} - \overline{PQ_2}\right| = \overline{Q_1Q_2} = 2a$. ◊

<u>Definition 6.3:</u>

a) Wir sagen:

Ein Punkt P liegt **innerhalb** einer Hyperbel, wenn gilt: $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| > 2a$.

Ein Punkt P liegt **außerhalb** einer Hyperbel, wenn gilt: $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| < 2a$.

b) Die **lineare Exzentrizität** e ist definiert als Abstand eines Brennpunktes vom Mittelpunkt der Hyperbel.

c) Die **numerische Exzentrizität** wird definiert durch $\varepsilon := \frac{e}{a}$.

d) Die **imaginäre Achse** einer Hyperbel ist derjenige Teil der Nebenachse, welcher zu beiden Seiten des Mittelpunkts die Länge $b := \sqrt{e^2 - a^2}$ besitzt.

<u>Anmerkung:</u>

- Die Exzentrizitäten sind eindeutig definiert, da nach Definition beide Brennpunkte vom Mittelpunkt denselben Abstand besitzen.
- Die Erklärung des Begriffs „imaginäre Achse“ erfolgt auf Seite 62.

Wir wollen nunmehr eine Hyperbel mit einfachen Mitteln konstruieren:

<u>Lemma 6.4:</u> (Punktweise Konstruktion)

Haben wir die Brennpunkte und den Abstand 2a der beiden Scheitelpunkte einer Hyperbel gegeben, so können wir sie unter Benutzung eines Zirkels punktweise konstruieren.

Beweis:

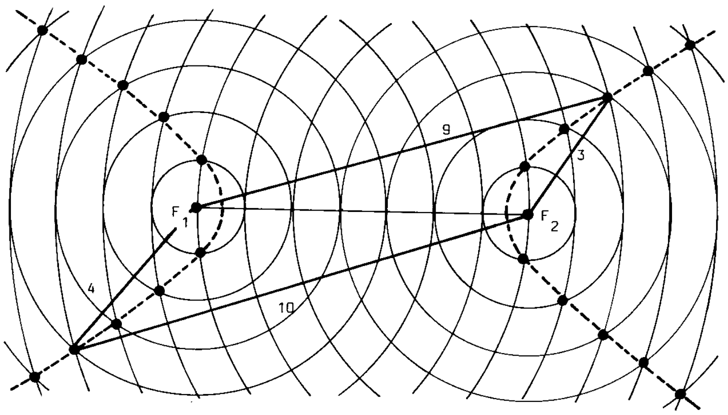

Abb. 6.3 [Schei2]

Wir schlagen um F_1 einen Kreis mit dem Radius r, um F_2 einen Kreis mit dem Radius $r' = 2a + r$. Die Schnittpunkte dieser beiden Kreises sind dann nach Satz 6.2 Punkte der Hyperbel, die sich auf diesem Weg punktweise konstruieren läßt. ◊

Korollar 6.5:

Eine Hyperbel ist achsensymmetrisch zu ihrer Haupt- und Nebenachse und damit punktsymmetrisch zu ihrem Mittelpunkt.

Beweis:

Die Behauptung läßt sich aus der Konstruktionsweise von Lemma 6.4 folgern:

Die Mittelpunkte der Kreise liegen auf der Hauptachse. Alle konstruierten Punkte sind demnach zu dieser achsensymmetrisch.

Vertauschen wir die Radien der Kreise um F_1 und F_2, so erhalten wir Punkte derselben Hyperbel. Also ist eine Hyperbel symmetrisch zur Nebenachse als Mittelsenkrechte der Hauptachse.

Die Punktsymmetrie ergibt sich aus den beiden Achsensymmetrien und der Tatsache, daß der Mittelpunkt einer Hyperbel der Schnittpunkt von Haupt- und Nebenachse ist. ◊

Lemma 6.6: (Fußpunktkonstruktion)

Wir erhalten bei der Fußpunktkonstruktion (Seite 18) als Fußpunktkurve K eine Hyperbel, wenn wir als vorgegebene Kurve k einen Kreis und als Fußpunkt einen außerhalb des Kreises liegenden Punkt F_1 verwenden.

Beweis:

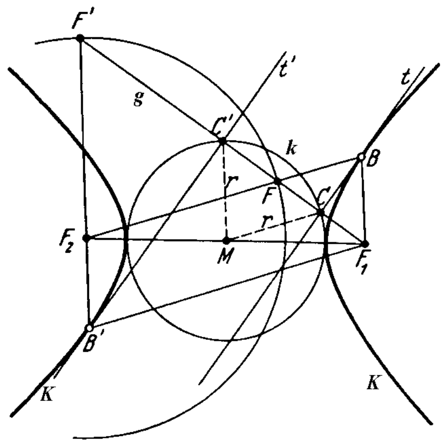

Abb. 6.4 [HiCoVo*]

Der Beweis von Lemma 6.6 ist identisch mit dem Beweis von Lemma 4.7 auf Seite 19f., wenn wir den Punkt F_1 derart wählen, daß er sich im Äußeren des Kreises k befindet. Wir müssen lediglich beachten, daß wir statt der Summe $\overline{F_1B} + \overline{F_2B} = \overline{FF_2}$ den Betrag der Differenz $\left|\overline{F_2B} - \overline{F_1B}\right| = \overline{FF_2}$ bilden.

Jeder der beiden Punkte B und B′ durchläuft dann einen Hyperbelast. ◊

Satz 6.7:

Die Gerade, die den von den Brennstrahlen F_1P und F_2P eingeschlossenen Winkel halbiert, ist eine Tangente an die Hyperbel in P.

Beweis:

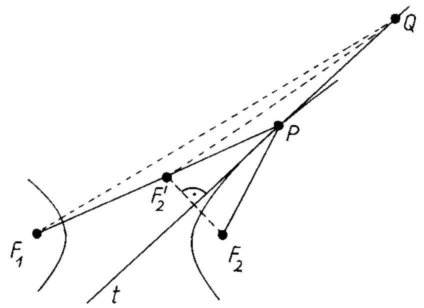

Abb. 6.5 [Schei1]

Sei P ein beliebiger Punkt der Hyperbel; sei t die Winkelhalbierende des Winkels $\angle F_1PF_2$. Sei F_2' das Spiegelbild von F_2 an t, das auf der Geraden F_1P liegt (da t die Winkelhalbierende ist). Es gilt dann: $\overline{F_1F_2'} = \left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = 2a$.

Angenommen, die Gerade t träfe die Hyperbel in einem weiteren Punkt Q. Es gilt nach der Dreiecksungleichung: $\overline{QF_1} > \overline{F_1F_2'} + \overline{F_2'Q} = 2a + \overline{F_2'Q}$. Ferner würde gelten – da t auch den Winkel $\angle F_1QF_2$ halbieren würde –: $\overline{QF_2'} = \overline{QF_2}$.

Somit: $\left|\overline{QF_1} - \overline{QF_2}\right| > 2a$. Also ist Q kein Punkt der Hyperbel und t ist eine Tangente im Punkt P. ◊

Korollar 6.8: (Konstruktion der Hyperbeltangenten)
Für die Konstruktion der Tangenten durch einen festgelegten Punkt außerhalb einer Hyperbel ist lediglich die Vorgabe der Brennpunkte und der Scheitelpunkte notwendig.

Beweis:
Der Beweis anhand von Abbildung 6.6 verläuft wortwörtlich wie der Beweis von Korollar 4.10 auf Seite 21. ◊

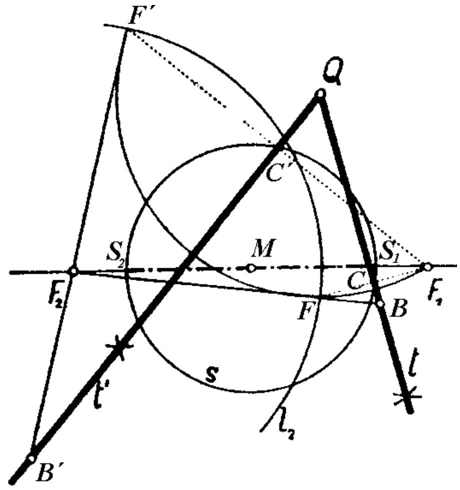

Abb. 6.6 [Poc*]

Korollar 6.9:

Jeder Punkt P (mit P ≠ M) außerhalb einer Hyperbel liegt auf genau einer Tangenten an jeden der Hyperbeläste.

Beweis:

Aus dem Beweis von Korollar 6.8 kann man folgern, daß jeder Punkt außerhalb der Hyperbel auf genau zwei Tangenten liegt. Daß diese nicht denselben Hyperbelast berühren können, ergibt sich daraus, daß die beiden Berührpunkte bei der Konstruktionsweise durch die Nebenachse getrennt werden und diese Achse ebenfalls die beiden Hyperbeläste voneinander trennt.

Für den Fall P = M gibt es „Tangenten“, welche die Hyperbel nur im Unendlichen berühren (sog. Asymptoten, siehe Abschnitt 6.2). ◊

Lemma 6.10:

Eine Hyperbel ist die Menge aller Punkte, die von einem Kreis und einem Punkt außerhalb dieses Kreises denselben Abstand haben.

Beweis:

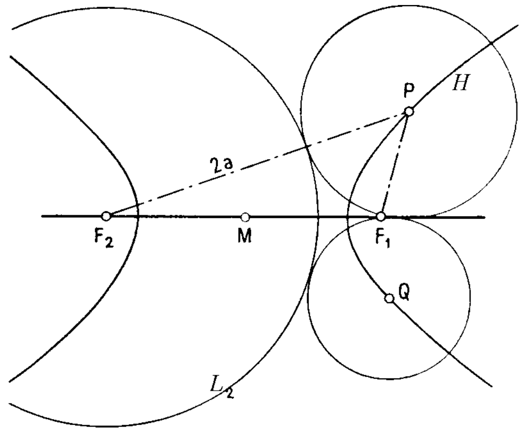

Abb. 6.7 [GüSt]

Sei der Leitkreis l_2 des Brennpunkts F_2 mit Radius 2a der vorgegebene Kreis; sei F_1 der festgelegte Punkt.

Dann sind die Punkte P der Hyperbel die Mittelpunkte derjenigen Kreise mit Radius r, die durch F_1 gehen und den Leitkreis berühren, denn es gilt:

$\overline{F_2P} = 2a + r = 2a + \overline{F_1P} \Leftrightarrow \left|\overline{F_2P} - \overline{F_1P}\right| = 2a$. ◊

6.2 Analytische Eigenschaften

Aus den in Abschnitt 6.1 aufgezeigten geometrischen Merkmalen einer Hyperbel wollen wir nunmehr analytische Eigenschaften herleiten. Dazu sei im folgenden stets ein kartesisches Koordinatensystem gegeben. Die Hauptachse der Hyperbel soll parallel zur x_1-Achse liegen.

Satz 6.11: (Hyperbelgleichung in Achsenform)
Sei eine Hyperbel mit dem Mittelpunkt $M = (m_1|m_2)$ und den Achsen a, b gegeben. Diese hat dann die Gleichung:

$$\frac{(x_1 - m_1)^2}{a^2} - \frac{(x_2 - m_2)^2}{b^2} = 1 .$$

Beweis:

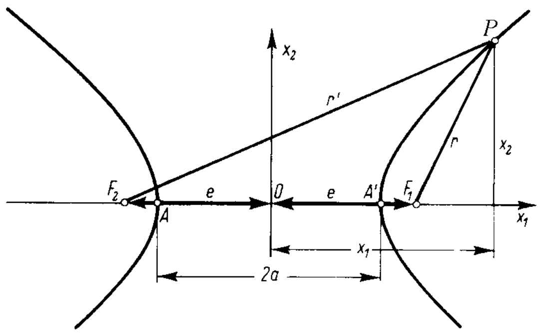

Abb. 6.8 [Hon]

Wir untersuchen zuerst den Fall, daß der Mittelpunkt mit dem Ursprung zusammenfällt.

Nach Satz 6.2 gilt für einen Punkt auf der Hyperbel: $\left|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}\right| = |r - r'| = 2a$.

O.B.d.A. sei $r' > r$, also $r' - r = 2a$. Mit anderen Worten:

$$\sqrt{(e + x_1)^2 + x_2{}^2} - \sqrt{(x_1 - e)^2 + x_2{}^2} = 2a \Leftrightarrow \sqrt{(e + x_1)^2 + x_2{}^2} = 2a + \sqrt{(x_1 - e)^2 + x_2{}^2} .$$

Daraus erhält man:

$$a \cdot \sqrt{(x_1 - e)^2 + x_2{}^2} = e \cdot x_1 - a^2 \Leftrightarrow (e^2 - a^2) \cdot x_1{}^2 - a^2 \cdot x_2{}^2 = a^2 \cdot (e^2 - a^2) .$$

Mit $e^2 = a^2 + b^2$ ergibt sich abschließend:

$$b^2 \cdot x_1^{\,2} - a^2 \cdot x_2^{\,2} = a^2 \cdot b^2 \Longleftrightarrow \frac{x_1^{\,2}}{a^2} - \frac{x_2^{\,2}}{b^2} = 1 .$$

Nach der Translation $x_1 \to x_1 - m_1$, $x_2 \to x_2 - m_2$ erhält man die Behauptung.

◊

Im folgenden sei stets eine Hyperbel in der Standarddarstellung $\frac{x_1^{\,2}}{a^2} - \frac{x_2^{\,2}}{b^2} = 1$ gegeben, d.h. der Mittelpunkt ist (0|0).

Anmerkungen:

- Die in Satz 6.11 hergeleitete Hyperbelgleichung spiegelt zugleich die in Korollar 6.5 festgestellten Symmetrien einer Hyperbel wider.
- Eine Hyperbel schneidet die x_1-Achse in den Scheitelpunkten (-a|0), (a|0).
- Eine Hyperbel schneidet die x_2-Achse in den imaginären Punkten $(-b\cdot i|0)$, $(b\cdot i|0)$. Aus diesem Grund heißt die Strecke b imaginäre Halbachse einer Hyperbel.

Lemma 6.12: (Gleichung der Asymptoten)

Für hinreichend große Werte von x_1 nähert sich die Kurve der Hyperbel den beiden Geraden mit den Gleichungen $x_2 = \frac{b}{a} \cdot x_1$ und $x_2 = -\frac{b}{a} \cdot x_1$ an.

Diese Geraden heißen **Asymptoten** einer Hyperbel.

Beweis:

Wir formen die Hyperbelgleichung um und erhalten:

$$x_2 = \pm \frac{b}{a} \cdot \sqrt{x_1^{\,2} - a^2} = \pm \frac{b}{a} \cdot x_1 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{a}{x_1}\right)^2} .$$

Für $x_1 \to \pm\infty$ gilt: $x_2 \to \pm\frac{b}{a}\cdot x_1$. Somit nähert sich also eine Hyperbel den beiden Geraden $x_2 = \frac{b}{a}\cdot x_1$ und $x_2 = -\frac{b}{a}\cdot x_1$ an, schneidet diese jedoch in keinem endlichen Punkt. ◊

Anmerkung:

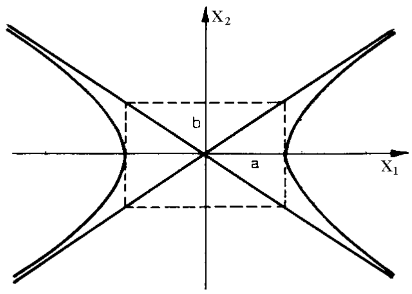

Abb. 6.9 [Schei2]

Hierdurch erhält die imaginäre Halbachse b eine reelle Bedeutung: Die Asymptoten haben beim x_1-Wert a den x_2-Wert b, gehen also durch den Punkt (a|b).

Außerdem teilen die Asymptoten die gesamte Ebene in vier Sektoren auf, wobei die beiden Hyperbeläste in gegenüberliegenden Sektoren liegen.

Korollar 6.13:

Schließen die beiden Asymptoten einen rechten Winkel ein, so genügt die Hyperbel der Gleichung: $x_1{}^2 - x_2{}^2 = a^2$.

Die Hyperbel heißt dann **gleichseitig** oder **rechtwinklig**.

Beweis:

Wir betrachten die beiden Asymptotengleichungen aus Lemma 6.12.

Für zwei sich rechtwinklig schneidende Geraden mit den Steigungsmaßen m_1 und m_2 muß gelten: $m_1 \cdot m_2 \overset{!}{=} -1$.

Hier: $\frac{b}{a}\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)=-\left(\frac{b}{a}\right)^2\overset{!}{=}-1$. Dies gilt nur für den Fall a = b. Dann sind die Asymptoten zugleich die Winkelhalbierenden der Quadranten und die Hyperbel hat die Gleichung: $x_1{}^2-x_2{}^2=a^2$. ◊

Lemma 6.14:

Seien a_1, a_2 die Asymptoten einer gleichseitigen Hyperbel. Verwendet man diese als ein neues Koordinatensystem, so genügt die Hyperbel der Gleichung: $a_1\cdot a_2=\frac{a^2}{2}$.

Beweis:

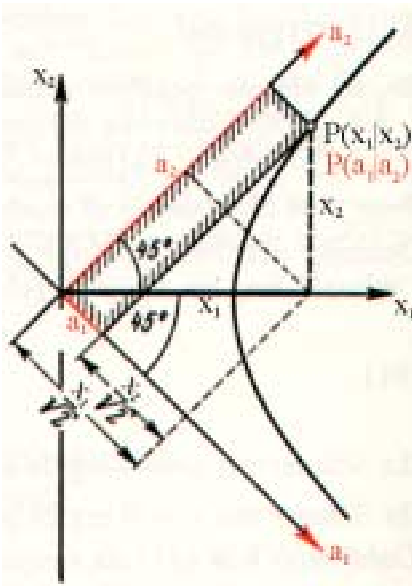

Abb. 6.10 [Hon*]

Es gilt: $a_1=\frac{x_1}{\sqrt{2}}-\frac{x_2}{\sqrt{2}}$ und $a_2=\frac{x_1}{\sqrt{2}}+\frac{x_2}{\sqrt{2}}$; also: $a_1\cdot a_2=\frac{1}{2}\cdot(x_1{}^2-x_2{}^2)=\frac{a^2}{2}$. ◊

Korollar 6.15:

Jede Hyperbel kann als affines Bild einer rechtwinkligen Hyperbel aufgefaßt werden.

Beweis:

Eine rechtwinklige Hyperbel genügt nach Korollar 6.13 der Gleichung: $x_1'^2 - x_2'^2 = a^2 \Leftrightarrow \frac{x_1'^2}{a^2} - \frac{x_2'^2}{a^2} = 1$. Bei Anwendung der affinen Abbildung: $x_1 = x_1'$, $x_2 = \frac{b}{a} \cdot x_2'$ erhalten wir die Hyperbel mit der Gleichung $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1$. ◊

Wir wollen jetzt auch für eine Hyperbel die Lagebeziehungen zu einer Geraden behandeln. Hierbei werden wir zuerst die Tangentengleichung aufstellen und anschließend die drei möglichen Lagen untersuchen.

Lemma 6.16: (Gleichung einer Tangenten)
Die Gleichung einer Tangente, welche eine Hyperbel im Punkt $\overline{P} = (\overline{x}_1 \mid \overline{x}_2)$ berührt, lautet:

$$\frac{x_1 \cdot \overline{x}_1}{a^2} - \frac{x_2 \cdot \overline{x}_2}{b^2} = 1.$$

Beweis:

Wir betrachten eine Sekante, welche die Hyperbel in den Punkten $\overline{P} = (\overline{x}_1 \mid \overline{x}_2)$ und $\widetilde{Q} = (\widetilde{x}_1 \mid \widetilde{x}_2)$ schneidet. Diese Punkte genügen den Gleichungen: $\frac{\overline{x}_1^2}{a^2} - \frac{\overline{x}_2^2}{b^2} = 1$ und $\frac{\widetilde{x}_1^2}{a^2} - \frac{\widetilde{x}_2^2}{b^2} = 1$.

Durch Subtraktion erhält man die Gleichung: $\frac{\widetilde{x}_1^2 - \overline{x}_1^2}{a^2} - \frac{\widetilde{x}_2^2 - \overline{x}_2^2}{b^2} = 0$, aus der sich die Steigung der Sekanten ergibt: $\frac{\widetilde{x}_2 - \overline{x}_2}{\widetilde{x}_1 - \overline{x}_1} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\widetilde{x}_1 + \overline{x}_1}{\widetilde{x}_2 + \overline{x}_2}$.

Beim Übergang $\widetilde{Q} \to \overline{P}$, das heißt $(\widetilde{x}_1 \mid \widetilde{x}_2) \to (\overline{x}_1 \mid \overline{x}_2)$, erhalten wir die Tangentengleichung: $\frac{x_2 - \overline{x}_2}{x_1 - \overline{x}_1} = \frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{\overline{x}_1}{\overline{x}_2}$, welche sich schnell zu:

$\frac{x_1 \cdot \overline{x}_1}{a^2} - \frac{x_2 \cdot \overline{x}_2}{b^2} = \frac{\overline{x}_1{}^2}{a^2} - \frac{\overline{x}_2{}^2}{b^2}$ umformen läßt. Hierbei ist die rechte Seite gleich 1, da $\overline{P}$ ein Punkt der Hyperbel ist, und es ergibt sich die Behauptung. ◊

Satz 6.17:

Gegeben sei eine Hyperbel in Standarddarstellung, ferner sei g: $x_2 = m \cdot x_1 + n$ eine beliebige Gerade. Dann gilt für die Lage dieser Geraden in Bezug auf die Hyperbel:

$$\left.\begin{array}{r} \Delta < 0 \Longleftrightarrow \text{g ist eine Passante} \\ \Delta = 0 \Longleftrightarrow \text{g ist eine Tangente} \\ \Delta > 0 \Longleftrightarrow \text{g ist eine Sekante} \end{array}\right\} \text{mit der Diskriminanten } \Delta := b^2 + n^2 - a^2 \cdot m^2.$$

Beweis:

(1) Sei $b^2 - a^2 \cdot m^2 \neq 0$. Zur Berechnung der möglichen Schnittpunkte der Geraden g mit der Hyperbel setzen wir die Geradengleichung in die Hyperbelgleichung ein und erhalten:

$$\frac{x_1{}^2}{a^2} - \frac{(m \cdot x_1 + n)^2}{b^2} = 1 \Longleftrightarrow b^2 \cdot x_1{}^2 - a^2 \cdot m^2 \cdot x_1{}^2 - 2 \cdot a^2 \cdot m \cdot n \cdot x_1 - a^2 \cdot n^2 = a^2 \cdot b^2$$

$$\Longleftrightarrow (b^2 - a^2 \cdot m^2) \cdot x_1{}^2 - 2 \cdot a^2 \cdot m \cdot n \cdot x_1 - a^2 \cdot (n^2 + b^2) = 0$$

$$\Longleftrightarrow x_1{}^2 + \frac{2 \cdot a^2 \cdot m \cdot n}{a^2 \cdot m^2 - b^2} \cdot x_1 + \frac{a^2 \cdot (n^2 + b^2)}{a^2 \cdot m^2 - b^2} = 0$$

$$\Longleftrightarrow x_{1_{I/II}} = -\frac{a^2 \cdot m \cdot n}{a^2 \cdot m^2 - b^2} \pm \frac{a \cdot b \cdot \sqrt{b^2 + n^2 - a^2 \cdot m^2}}{a^2 \cdot m^2 - b^2}$$

Wir betrachten jetzt die Diskriminante $\Delta := b^2 + n^2 - a^2 \cdot m^2$, welche über die Anzahl der Schnittpunkte Auskunft gibt. Es gilt:

- $\Delta > 0$ => Es gibt zwei Schnittpunkte. => g ist eine Sekante.
- $\Delta = 0$ => Es gibt genau einen Schnittpunkt. => g ist eine Tangente.
- $\Delta < 0$ => Es gibt keinen reellen Schnittpunkt. => g ist eine Passante.

(2) Sei nun $b^2 - a^2 \cdot m^2 = 0$, also $m^2 = \frac{b^2}{a^2}$ bzw. $m = \frac{b}{a}$. O.B.d.A. gelte m > 0. Somit hat die Gerade die Gleichung $x_2 = \frac{b}{a} \cdot x_1 + n$, ist also eine Parallele zu einer

Asymptoten. Wir erhalten als einzigen Schnitt den Punkt mit der x_1-Koordinate:

$$x_1 = \frac{a \cdot (b^2 + n^2)}{2 \cdot b \cdot n} \quad (*).$$

(a) Für $n = 0$ (Asymptoten) erhalten wir aus (*) die unlösbare Gleichung: $0 \cdot x_1 = \frac{a \cdot b}{2}$. Andererseits gilt aber auch: $\Delta = 0$. Also ist diese Gerade eine Tangente, welche aber die Hyperbel im Endlichen nicht berührt. Asymptoten sind demnach Hyperbeltangenten, deren Berührpunkt im Unendlichen liegt.

(b) Für $n \neq 0$ gilt für die Diskriminante: $D = n^2 > 0$, also ist g eine Sekante. Der zweite Schnittpunkt mit der Hyperbel liegt folglich im Unendlichen, da die Geraden parallel zu den Asymptoten verlaufen. ◊

6.3 Anwendungen

a) Konstruktionsmöglichkeiten:

Wie bei der Parabel gibt es auch für die Hyperbel nur eine bedeutende Konstruktionsmöglichkeit:

Die Faden-Konstruktion:

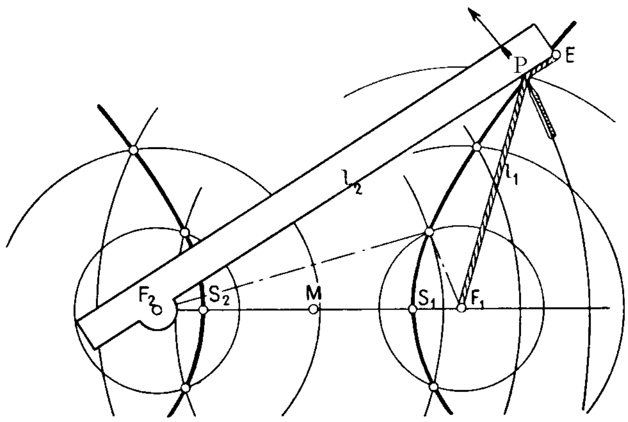

Abb. 6.11 [GüSt*]

Hierzu benötigen wir ein Lineal, welches sich in einem Punkt (Brennpunkt F_2) drehbar fixieren läßt. An dem entfernten Ende E des Lineals befestigen wir einen Faden, dessen zweites Ende an einem weiteren Punkt (Brennpunkt F_1) angebracht wird. Bewegen wir nun das Lineal und drücken zugleich den mit einem Stift gespannten Faden dagegen, so beschriebt der sich im Punkt P befindende Stift den Ast einer Hyperbel. Dies kann man sich dermaßen verdeutlichen:

Der Abstand des Brennpunktes F_2 vom Ende des Lineals betrage l_2; die Gesamtlänge des Fadens sei l_1. Diese beiden Größen sind stets konstant.

Wir betrachten nun den Punkt P, in welchem der Stift eingespannt ist. Die Strecke PE habe die Länge x. Dann gilt:

$$\overline{F_2P} - \overline{F_1P} = (l_2 - x) - (l_1 - x) = l_2 - l_1 = \text{konstant}.$$

b) Hyperbeln in der Umwelt:

1. Hyperbeln als Spiegel:

Im Gegensatz zu Ellipsen und Parabeln spielt bei Hyperbeln in der Praxis die Reflexion faktisch keine Rolle. Der Vollständigkeit halber möchte ich aber auch sie hier kurz erläutern:

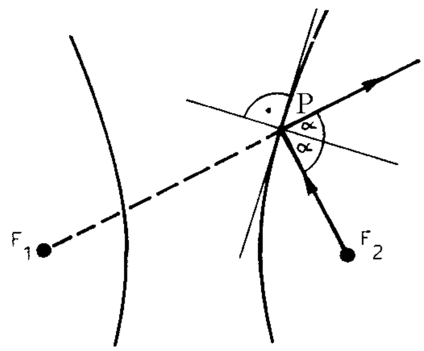

Abb. 6.12 [Schei2]

Eine Hyperbel hat die Eigenschaft, daß ein Strahl, der von einem der Brennpunkte ausgeht, an der Kurve derart reflektiert wird, daß es so aussieht, als käme er von dem anderen Brennpunkt. Er bleibt also im Innern des Hyperbelastes gefangen, hat jedoch den Brennpunkt des anderen Astes als virtuellen Ursprung.

Dies rührt daher, daß die Strahlen im Punkt P wie an der Tangente reflektiert werden. Diese halbiert nach Satz 6.7 den Winkel $\angle F_1PF_2$, also halbiert die zur Tangente orthogonale Gerade (Normale) den Winkel, den die Strecke F_2P mit der Verlängerung der Strecke F_1P einschließt. Das ist genau die Voraussetzung des physikalischen Reflektionsgesetzes.

2. „Ermittlung einer unbekannten und unerreichbaren Stelle“:

Eine wichtige Anwendung finden Hyperbeln bei der Ortung von Signalquellen:

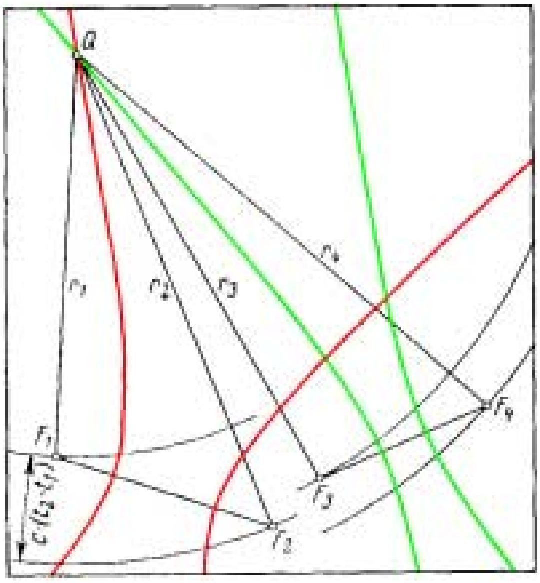

Abb. 6.13 [Hon]

Von einem unbekannten Punkt Q gehen Schall- oder Druckwellen aus. Dies kann z.B. durch ein Erdbeben oder durch einen Geschützknall geschehen. Mit nur vier Abhörgeräten F_1, F_2, F_3 und F_4 kann die Quelle sehr genau ermittelt werden (bei Geschützen beispielsweise bis auf 10 m genau). Dabei geht man folgendermaßen vor:

Die Welle, deren Geschwindigkeit v bekannt sei, erreiche die Punkte F_i zu den Zeiten t_i (i = 1, 2, 3, 4). Die Geräte F_1 und F_2, die miteinander verbunden sind, messen die Zeitdifferenz $|t_2 - t_1|$; genauso erhalten die gekoppelten Geräte F_3 und F_4 die Zeit $|t_4 - t_3|$.

Daraus lassen sich nunmehr die Wegdifferenzen ermitteln:

$$\left|\overline{QF_2} - \overline{QF_1}\right| = |r_2 - r_1| = v \cdot |t_2 - t_1| \text{ und } \left|\overline{QF_4} - \overline{QF_3}\right| = |r_4 - r_3| = v \cdot |t_4 - t_3|\,.$$

Demnach liegt der Punkt Q sowohl auf der (roten) Hyperbel mit den Brennpunkten F_1 und F_2 und der Hauptachse $2 \cdot a = v \cdot |t_2 - t_1|$ als auch auf der (grünen) Hyperbel mit den Brennpunkten F_3 und F_4 und der Hauptachse $2 \cdot a' = v \cdot |t_4 - t_3|$. Diese Hyperbeln sind eindeutig konstruierbar.

An welchem der vier Schnittpunkte der beiden Hyperbeln der gesuchte Punkt Q liegt, läßt sich im allgemeinen durch eine grobe Peilung bestimmen.

3. Interferenz von Wellen:

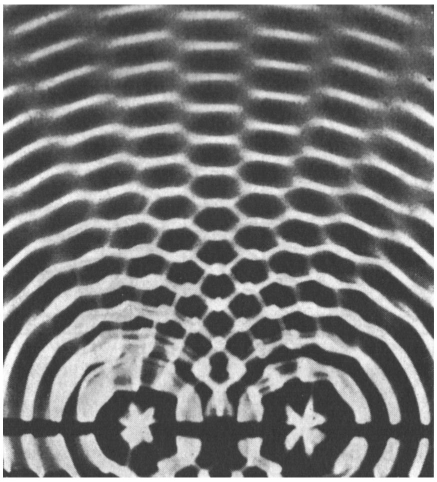

Abb. 6.14 [EcJeVo]

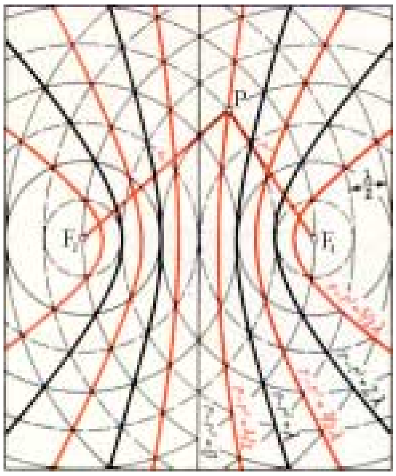

Abb. 6.15 [Hon]

Auch bei der Ausbreitung von Wellen treten Hyperbeln auf: Angenommen, wir haben zwei gleichphasige punktförmige Wellenerreger im Abstand d gegeben. Die beiden Wellen überlagern sich, es bilden sich sogenannte Interferenzbilder. Am besten sieht man dies bei Wasserwellen (Abbildung 6.14). Zur Erklärung betrachten wir Abbildung 6.15:

Die beiden Erreger bilden die Brennpunkte F_1 und F_2. Die Kreise stellen Wellenberge (durchgezogene Linie) und Wellentäler (gestrichelte Linie) dar. Die farbigen Linien sind die Interferenzfiguren: Auf den roten Linien entstehen Intensitätsminima, dort herrscht Auslöschung. Die schwarzen Linien stellen die Orte maximaler Verstärkung dar. Daß es sich bei diesen roten und schwarzen Kurven um konfokale Hyperbeln (d.h. um Hyperbeln mit denselben Brennpunkten) handelt, zeigt man folgendermaßen:

Bei der Verstärkung gilt (physikalisch), daß der Gangunterschied der beiden Wellenzüge in diesem Punkt P ein gerades Vielfaches der halben Wellenlänge λ ist. Es gilt also: $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2n \cdot \frac{\lambda}{2} = n \cdot \lambda = \text{konstant}$ $(n \in \mathbf{N})$. Also liegen diese Punkte auf einer Hyperbel.

Analog zeigt man, daß nicht nur die Punkte maximaler Verstärkung, sondern auch die Punkte maximaler Auslöschung eine Hyperbel bilden.

c) Lösung klassischer Probleme:

Zwei der klassischen Probleme aus Kapitel 2 lassen sich mit Hilfe von Hyperbeln lösen. Dabei wollen wir hier auf die Besprechung des Delischen Problems verzichten, das wir zur Genüge in den Kapiteln 2 und 5.3 behandelt haben, da die Lösung mit einer Hyperbel und einer Parabel keine grundlegend neuen Erkenntnisse liefert. Wir werden aber ausführlich eingehen auf ...

Die Dreiteilung eines Winkels:

Das Problem, ob man einen gegebenen Winkel mit Zirkel und Lineal exakt in drei gleiche Teile teilen kann, war bereits Hippias, einem Mathematiker des 5. Jahrhunderts vor Christus, bekannt. In der Galois-Theorie wurde viel später gezeigt, daß es in dieser Form unlösbar ist. Unter Zuhilfenahme eines Hyperbelastes kann man es jedoch lösen (erstmals durch Pappus im 4. Jahrhundert nach Christus).

Um die Dreiteilung eines Winkels beweisen zu können, benötigen wir folgendes Lemma:

Lemma 6.18:

Die beiden Strecken zwischen den Hyperbelpunkten einer beliebigen Sekante und den benachbarten Schnittpunkten mit den Asymptoten sind gleich lang.

Beweis:

Gegeben sei eine beliebige Hyperbel H mit den Asymptoten a_1 und a_2. Wir betrachten nur den Fall, daß die Sekante PQ der Hyperbel die Gleichung g: $x_2 = m \cdot x_1 + n$ mit $m, n \neq 0$ besitzt.

Wir wollen beweisen, daß gilt $\overline{PP'} = \overline{QQ'}$; dazu genügt zu zeigen: PQ und P′Q′ haben den gleichen Mittelpunkt R.

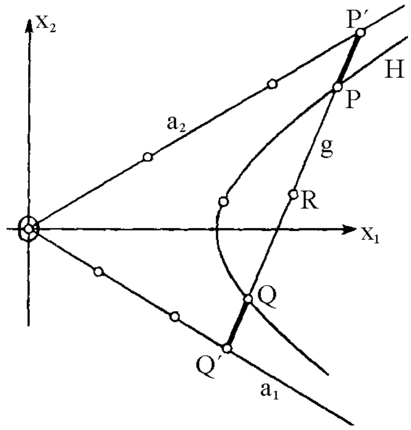

Abb. 6.16 [GüSt*]

Nach Satz 6.17 gilt für die Schnittpunkte P und Q der Sekanten mit der Hyperbel:

$x_{1(P,Q)} = -\frac{a^2 \cdot m \cdot n}{a^2 \cdot m^2 - b^2} \pm \frac{a \cdot b \cdot \sqrt{b^2 + n^2 - a^2 \cdot m^2}}{a^2 \cdot m^2 - b^2}$, für den Mittelpunkt R von $\overline{PQ}$ folgt:

$$x_{1(R)} = \frac{x_{1(Q)} + x_{1(P)}}{2} = \frac{a^2 \cdot m \cdot n}{b^2 - a^2 \cdot m^2}.$$

Als Schnittpunkte P′, Q′ der Sekanten mit den Asymptoten $x_2 = \pm\frac{b}{a} \cdot x_1$ erhält man: $x_{1(P',Q')} = \frac{a \cdot n}{\pm b - m \cdot a}$ und für deren Mittelpunkt R′: $x_{1(R')} = \frac{a^2 \cdot m \cdot n}{b^2 - a^2 \cdot m^2}$.

Damit stimmen die x_1-Koordinaten der Punkte R und R′ überein. Da jedoch beide auf derselben Geraden g liegen, stimmen auch die x_2-Koordinaten überein, also sind beide Punkte identisch. $\overline{PQ}$ und $\overline{P'Q'}$ haben somit den gemeinsamen Mittelpunkt R. ◊

<u>***Satz 6.19:***</u> (Dreiteilung eines Winkels)

Es ist möglich, einen beliebigen Winkel φ < 90° mit Zirkel und Lineal in drei gleiche Teile zu teilen, wenn man eine gleichseitige Hyperbel zu Hilfe nimmt.

<u>Beweis:</u>

Sei H eine gleichseitige Hyperbel mit Mittelpunkt M und den Asymptoten a_1 und a_2. Sei ferner φ derjenige Winkel, der in drei gleiche Teile geteilt werden soll.

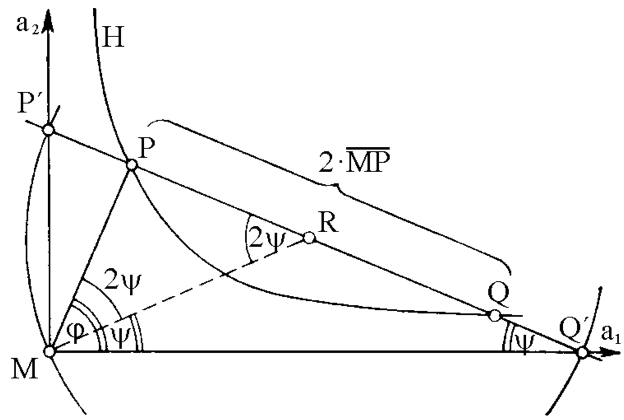

Abb. 6.17 [GüSt*]

Wir betrachten nun den Punkt P der Hyperbel, der dadurch definiert ist, daß die Geraden MP und a_1 den Winkel φ einschließen. Wir konstruieren den Punkt Q auf der Hyperbel derart, daß $\overline{PQ} = 2 \cdot \overline{MP}$ ist und Q ferner im Innern des Winkels φ liegt. Anschließend bilden wir den Mittelpunkt R der Strecke $\overline{PQ}$. Dann schließen die Geraden MR und a_1 den Winkel ψ ein. Wir werden nun zeigen, daß gilt: $\psi = \frac{\varphi}{3}$, daß wir also den Winkel φ durch elementare Konstruktionsschritte gedrittelt haben.

Aus Lemma 6.18 folgern wir, daß gilt: $\overline{PP'} = \overline{QQ'}$, wobei P′ und Q′ die Schnittpunkte der Hyperbelsekanten PQ mit den Asymptoten a_2, a_1 sind. Der Punkt R ist dann ebenfalls der Mittelpunkt der Strecke $\overline{P'Q'}$. Da wir eine gleichseitige Hyperbel vorausgesetzt haben, liegen die Punkte M, P′ und Q′ auf dem Thaleskreis mit Mittelpunkt R und Radius $\overline{MR}$. Demzufolge erhalten wir die gleichschenkligen Dreiecke Δ MRQ′ und Δ MPR.

Nun gilt:

- ∠MQ′R = ψ, da auch der andere Basiswinkel des Dreiecks die Größe ψ hat.
- ∠MRP = 2·ψ als Außenwinkel des Dreiecks Δ MRQ′.
- ∠PMR = 2·ψ als Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck.

Zusammen:

$\varphi = \angle PMQ' = \angle PMR + \angle RMQ' = 2\cdot\psi + \psi = 3\cdot\psi$, also $\psi = \frac{1}{3}\cdot\varphi$. ◊