Erste Staatsprüfung für das Lehramt an Gymnasien

Wissenschaftliche Hausarbeit
im Fach Mathematik

Kegelschnitte –
Verschiedene Darstellungen
und ihre Beziehungen

vorgelegt von

Thomas Wilhelm Schwarzer
Steinhäußerstraße 12
61169 Friedberg / Hessen

Gutachter:
Prof. Dr. Albrecht Beutelspacher

Datum: 20. Juni 2000

Inhaltsverzeichnis

1 Einführung

In meiner Wissenschaftlichen Hausarbeit möchte ich als Thema die Kegelschnitte behandeln. Diese entstehen dadurch, daß man einen geraden, doppelten Kreiskegel mit einer Ebene schneidet; dabei bilden sich – abgesehen von Sonderfällen – Kurven, welche Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln genannt werden.

Die Kegelschnittlehre selbst ist über zweitausend Jahre alt und schon im 3. Jahrhundert vor unserer Zeitrechnung von dem Griechen Apollonius von Perga umfangreich behandelt worden. Während man aber anfangs Kegelschnitte nur als räumliche Schnittgebilde eines Kegels mit einer Ebene oder als Ortslinien auffaßte, kamen später noch die algebraisch exakten Beschreibungen von Kegelschnitten durch Gleichungen und zuletzt die projektive Betrachtungsweise hinzu.

Diese Arbeit hat sich zum Ziel gesetzt, verschiedene Möglichkeiten zur Behandlung von Kegelschnitten darzustellen. Zu diesem Zweck werde ich zunächst etwas zur Geschichte der Kegelschnitte sagen (Kapitel 2), um anschließend die verschiedenen Arten und deren Entstehung aufzuzeigen (Kapitel 3). In den Kapiteln 4 bis 6 werde ich dann jeden dieser Typen mit seinen charakteristischen Eigenschaften ausführlich behandeln. Im Kapitel 7 finden sich bedeutende Merkmale von Kegelschnitten, die sich am besten bei einer allgemeinen Betrachtungsweise erläutern lassen, wobei ich aber auch den Zusammenhang mit jedem Typ darstellen werde. Kapitel 8 wird abschließend Kegelschnitte in der projektiven Geometrie behandeln.

Jedes Kapitel beinhaltet Ideen aus mehreren Werken, wobei fast alle Bücher Beiträge zu verschiedenen Themen geliefert haben. Die gesamte benutzte Literatur habe ich im Anhang aufgeführt. Bei wortwörtlichen Zitaten, Bildern und Skizzen habe ich die Kurzbezeichnung der jeweiligen Quelle unmittelbar angegeben. Skizzen ohne Kennzeichnung wurden von mir selbst erstellt; für diese Arbeit veränderte Skizzen habe ich zusätzlich mit einem Stern [Quelle*] kenntlich gemacht.

2 Historische Vorbemerkungen

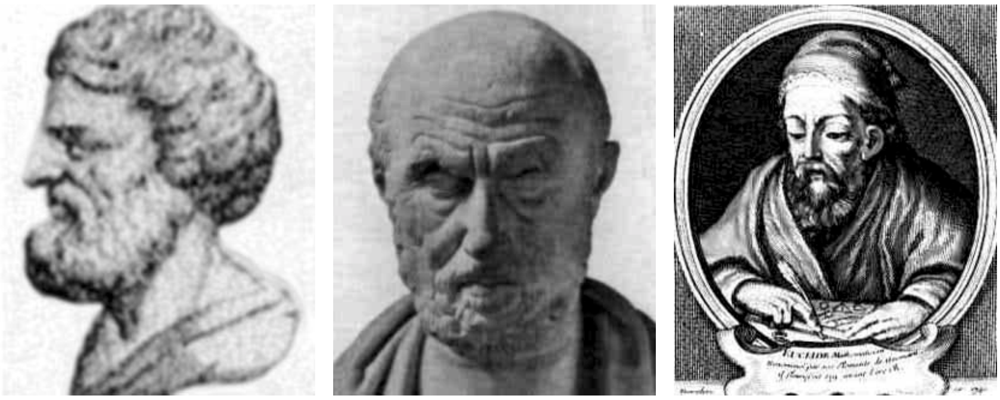

Abb. 2.1-3: Apollonius von Perga, Hippokrates von Chios und Eukild [WWW1]

Der Beginn der Untersuchung von Kegelschnitten reicht bis in das Altertum zurück. Damals kannten Mathematiker drei rein geometrisch bis dahin unlösbare Probleme:

1. Die Quadratur eines Kreises
2. Die Verdopplung eines Würfels
3. Die Dreiteilung eines Winkels

Die letzten beiden Probleme lassen sich mit Hilfe von Kegelschnitten lösen, wie ich in den Kapiteln 5 und 6 noch erläutern werde.

Das sogenannte Delische Problem, das heißt die Verdopplung des Volumens eines Würfels, führte zum ersten Auftreten der Kegelschnitte. Zur Entstehung dieser Aufgabe gibt es zwei Versionen:

1. König Minos ließ für seinen Sohn ein würfelförmiges Grabmal errichten. Da dies aufgrund eines Fehlers des Architekten zu klein ausgefallen war, wollte er die Größe verdoppeln.

2. Im Jahre 430 vor Christus herrschte in Athen die Pest. Das Orakel von Delos gab den Auftrag: „Verdoppelt die Größe des würfelförmigen Altars Apollos!“.

In beiden Fällen ist die Gleichung $x^3 = 2a^3$ zu lösen, wobei a die Kantenlänge des Würfels vor der Verdopplung bezeichnet, x die Kantenlänge danach. Aus dieser Gleichung folgt sofort $\frac{x}{a} = \sqrt[3]{2}$. Diese Strecke läßt sich jedoch nicht mit Zirkel und Lineal konstruieren (was man mit der Galois-Theorie zeigen kann), weswegen eine geometrische Lösung anfangs nicht möglich erschien.

Der Athener **Hippokrates von Chios** (ca. 470 bis ca. 410 vor Christus) war der erste, der eine Lösung für das Delische Problem fand: Er erkannte, daß es genau dann eine konstruierbare Lösung der Gleichung $x^3 = 2a^3$ gibt, wenn eine Zahl y existiert, welche die Proportionalen: $\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}$ (1) erfüllt.

Platon (ca. 427 bis ca. 347 vor Christus) war sogar der Meinung, daß der Orakelspruch Gottes nicht in erster Linie der Verdopplung des Altars dienen sollte, sondern daß dieses Problem deswegen formuliert wurde, um die Athener zum intensiveren Studium der Geometrie anzuhalten (siehe [Col]).

Menaechmus (ca. 380 bis ca. 320 vor Christus) löste dieses Problem, indem er geometrisch zeigte, daß man x und y als Schnittpunkte zweier Parabeln oder einer Hyperbel und einer Parabel bestimmen kann. Algebraisch läßt sich dies folgendermaßen nachvollziehen:

Gleichung (1) läßt sich in folgende Gleichungssysteme umformen:

(a) $x^2 = a \cdot y$, $y^2 = 2a \cdot x$. Dies sind zwei Parabeln.

oder (b) $x^2 = a \cdot y$, $x \cdot y = 2a^2$. Dies ist eine Parabel und eine Hyperbel.

Menaechmus zeigte nun, daß Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln (die er aber noch nicht so bezeichnete) dadurch entstehen, daß man eine Ebene mit einem doppelten, geraden Kreiskegel schneidet. Hierdurch entstand der Name „**Kegelschnitte**“ (lat. sectiones conicae).

Euklid (ca. 325 bis ca. 265 vor Christus) befaßte sich in Alexandria ebenfalls mit Kegelschnitten. Leider gingen aber alle vier Bücher, die er diesem Thema widmete, verloren. Er war der erste, der eine Parabel als Ortskurve eines Punktes konstruierte, dessen Abstand von einem festen Punkt (Brennpunkt) proportional zu seinem Abstand von einer festen Geraden (Leitlinie) ist.

Am bedeutendsten für die Erforschung der Kegelschnitte war **Apollonius von Perga**, genannt „der große Geometer". Geboren wurde er ca. 262 vor Christus in Perga (Pamphylien), gestorben ist er ca. 190 vor Christus in Alexandria.

Apollonius verfaßte ein außerordentlich umfangreiches und vollständiges achtbändiges Werk über Kegelschnitte mit dem Titel „De sectionibus conicis". Die ersten vier Bücher überlebten in der griechischen Originalsprache, die folgenden drei in arabischer Übersetzung, während das achte, welches unter anderem die Verdopplung eines Würfels und die Dreiteilung eines Winkels behandelte, nicht erhalten geblieben ist.

Apollonius gelangte zu seinen Erkenntnissen ebenfalls dadurch, daß er den Schnitt einer Ebene mit einem Doppelkegel untersuchte. Er führte die Namen „Ellipse", „Parabel" und „Hyperbel" ein und nahm in seinen Büchern unter anderem schon sinngemäß Steiners Satz vorweg, auf den ich in Kapitel 8 näher eingehen werde.

Aber Apollonius war nicht nur ein Theoretiker, sondern er nutzte sein Wissen über Kegelschnitte auch zur Lösung praktischer Probleme: So entwickelte er eine spezielle Sonnenuhr, die nicht auf einem Kreis, sondern einer Ellipse aufgezeichnet war, was ihr mehr Genauigkeit verlieh.

Als letzter Mathematiker der Antike befaßte sich **Pappus** (ca. 290 bis ca. 350 nach Christus) aus Alexandria, der letzte große griechische Geometer, mit Kegelschnitten. Er zeigte, daß die Dreiteilung eines Winkels zwar nicht mit Zirkel und Lineal alleine ausgeführt werden kann, daß dies aber möglich ist, wenn man lediglich eine besondere Hyperbel zu Hilfe nimmt.

Erst im 16. Jahrhundert beschäftigte man sich wieder mit Kegelschnitten, vor allem **Johann Werner**, genannt **Werner von Nürnberg** (1468-1522), der in erster Linie in der Astronomie und Trigonometrie hervorgetreten ist. Er leitete einige Eigenschaften von Kegelschnitten durch Projektion eines Kreises her.

Im Jahre 1822 veröffentlichte **Germinal Pierre Dandelin** (1794-1847) einen Satz, der besagt, daß – wenn ein Doppelkegel von einer Ebene geschnitten wird – die Brennpunkte des dadurch entstehenden Kegelschnitts genau die Punkte sind, in denen diese Ebene Kugeln (sogenannte „Dandelinsche Kugeln“) berührt, die dem Kegel einbeschrieben sind. Hierzu trug auch wesentlich **Adolphe Quetelet** (1796-1874) bei, dessen Name jedoch in diesem Zusammenhang fast vollkommen in Vergessenheit geraten ist.

Die neuesten Entwicklungen, die ich in Kapitel 8 noch erläutern werde, fanden durch **Jakob Steiner** (1796-1863) und **Christian von Staudt** (1798-1867) statt.

Die historischen Abbildungen 2.4-2.6 entstammen dem 1525 in Nürnberg von Albrecht Dürer veröffentlichten Buch: „Underweysung der messung mit dem zirckel und richtscheyt in linien ebnen und ganzen corporen“ (nach [Fis]). Sie zeigen bereits die Entstehungsweise der Kegelschnitte, wie wir sie im nächsten Kapitel ausführlich behandeln werden.

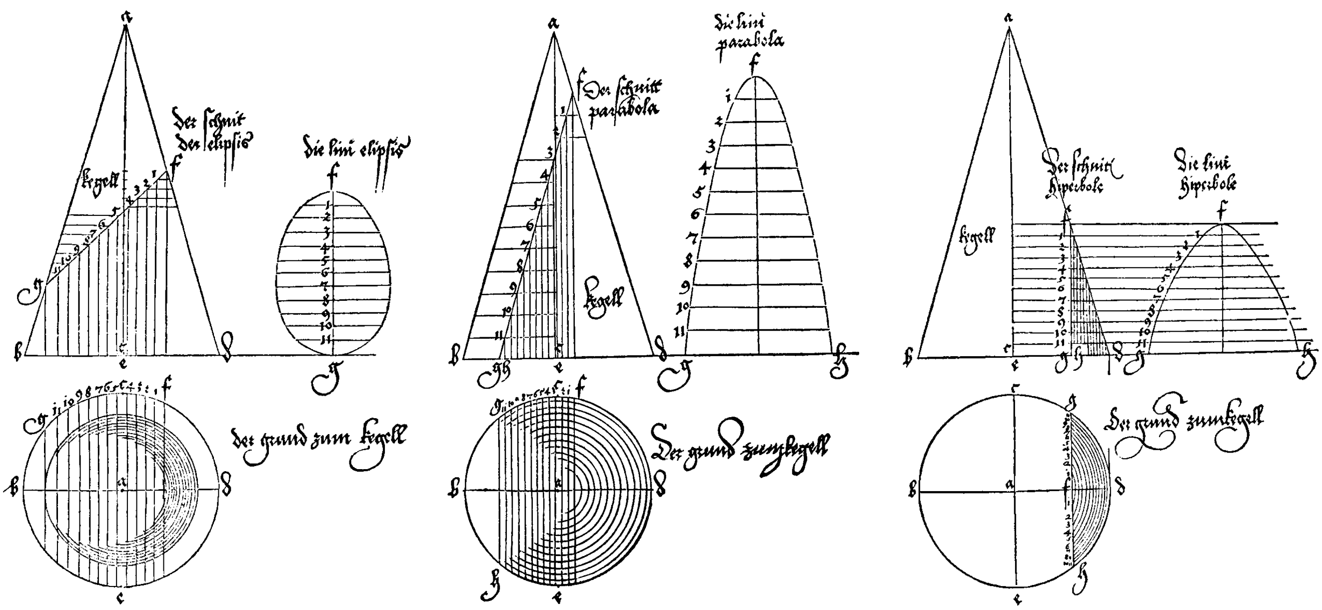

Abb. 2.4-6 [Fis]

3 Räumliche Entstehung der Kegelschnitte

Zur Entstehung der verschiedenen Kegelschnittypen ist zuerst die Definition eines Doppelkegels notwendig.

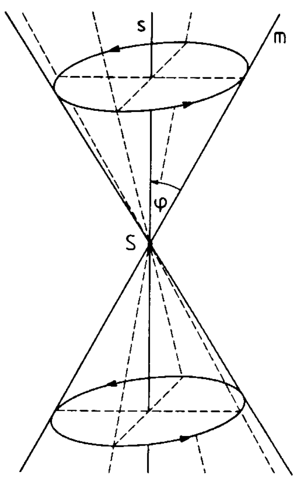

Abb. 3.1 [Schu]

Definition 3.1:

Ein (gerader) **Doppelkegel** mit Spitze S und Kegelachse s ist die Menge aller Punkte auf den Geraden m (den sog. **Mantelgeraden**), die im Punkt S den festen Winkel φ mit der Kegelachse s einschließen. Der Winkel 2φ wird hierbei als **Öffnungswinkel** des Kegels bezeichnet.

Eine andere Möglichkeit, einen Doppelkegel zu definieren, besteht darin, daß man die Mantelfläche als Rotationsfigur einer Geraden m durch den Punkt S ansieht, die um eine vorgegebene feste Gerade s ($S \in s$) mit festem Winkel φ rotiert.

Ein Kegelschnitt entsteht nun durch den Schnitt einer Ebene mit einem Doppelkegel. In Abbildung 3.2 sind die durch die Neigung der Ebene bestimmten möglichen Kegelschnittarten eingezeichnet.

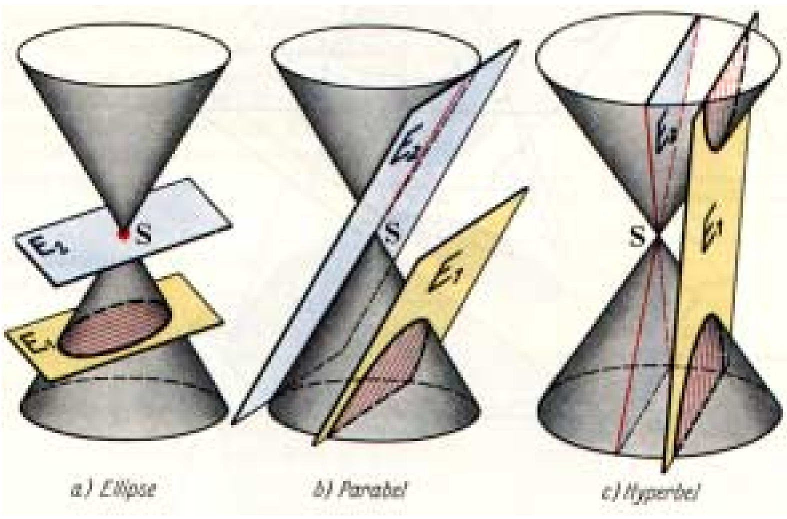

Abb. 3.2 [Hon*]

Um die verschiedenen Typen der Kegelschnitte zu definieren, betrachten wir das Verhalten der Schnittebene zu den Mantelgeraden des Doppelkegels:

<u>Definition 3.2:</u> (siehe Abb. 3.2)

Ist die Spitze S des Doppelkegels kein Element der Schnittebene, so ergeben sich folgende **nicht entartete Kegelschnitte** (betrachte die Ebenen E_1):

a) eine **Ellipse**, wenn E_1 parallel zu <u>keiner</u> Mantelgeraden verläuft,
b) eine **Parabel**, wenn E_1 parallel zu <u>genau einer</u> Mantelgeraden verläuft, und
c) eine **Hyperbel**, wenn E_1 parallel zu <u>zwei</u> Mantelgeraden verläuft.

Trifft nun die Schnittebene die Spitze S, so erhalten wir folgende **entartete Kegelschnitte** (betrachte die Ebenen E_2):

a) einen **Punkt**, wenn E_2 parallel zu <u>keiner</u> Mantelgeraden verläuft,
b) eine **Doppelgerade** (dies sind zwei zusammenfallende Geraden), wenn E_2 parallel zu <u>genau einer</u> Mantelgeraden verläuft, und
c) ein sich in S schneidendes **Geradenpaar**, wenn E_2 parallel zu <u>zwei</u> Mantelgeraden verläuft.

Aus dieser Definition ergibt sich sofort Korollar 3.3, das manchmal selbst als Definition verwendet wird. Wir betrachten hierbei das Verhältnis des halben Öffnungswinkels φ zum Schnittwinkel ω der Ebene mit der Kegelachse:

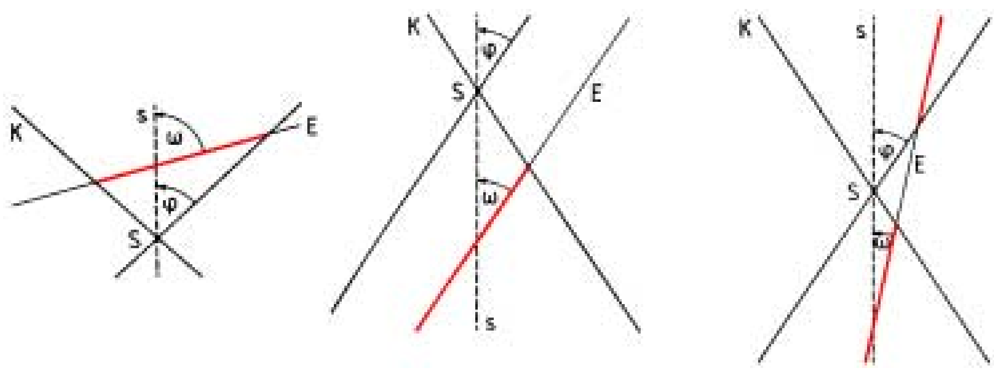

Abb. 3.3 [Schu*]

Korollar 3.3: (siehe Abb. 3.3)

Beim Schnitt einer Ebene E mit einem geraden Doppelkegel K mit halbem Öffnungswinkel φ entsteht ein **Kegelschnitt** (in der Abbildung rot markiert). Der Typ dieses Schnittgebildes ist abhängig vom Winkel ω, in welchem die Ebene E die Kegelachse s schneidet. Es gibt folgende Fälle:

Nicht entartet ($S \notin E$):	Entartet ($S \in E$):
a) $\omega = 90°$: **Kreis**	a) $\varphi < \omega \leq 90°$: **Punkt**
b) $\varphi < \omega < 90°$: **Ellipse**	b) $\omega = \varphi$: **Doppelgerade**
c) $\omega = \varphi$: **Parabel**	c) $0° \leq \omega < \varphi$: **Geradenpaar**
d) $0° \leq \omega < \varphi$: **Hyperbel**	

Korollar 3.4:

Alle Kegelschnitte sind achsensymmetrisch.

Beweis:

Die Kegelschnitte entstehen durch den Schnitt einer Ebene E mit einem Doppelkegel. Beide Körper besitzen eine gemeinsame Symmetrieebene, welche die Kegelachse s enthält und senkrecht zu E ist. Die Symmetrieachse der Kegelschnitte ist dann der Schnitt der Symmetrieebene mit E. ◊

Anmerkung:

In den Kapiteln 4 und 6 werden wir zeigen, daß Ellipsen und Hyperbeln außer der oben definierten Achse noch eine weitere Symmetrieachse besitzen.

Um elementare Eigenschaften der Kegelschnitte herzuleiten, werden wir in den nächsten Kapiteln die Dandelinschen Kugeln verwenden. Als Aufriß sind diese in Abbildung 3.4 dargestellt, perspektivisch finden wir sie in den Abbildungen 4.2, 5.2 und 6.2.

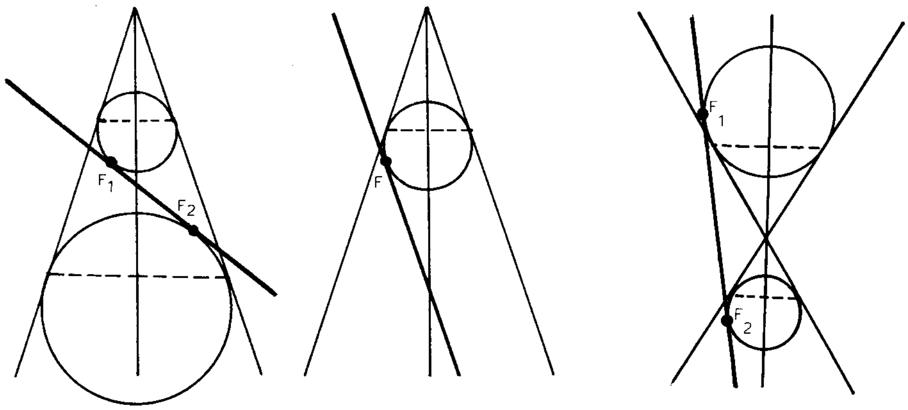

Abb. 3.4 [Schei2]

> ***Satz 3.5:*** (Dandelinsche Kugeln)
>
> Gegeben sei ein Doppelkegel, der von einer Ebene geschnitten wird. Dann gibt es zwei Kugeln, von denen jede den Kegelmantel in einem Kreis und die Ebene in einem Punkt berührt. Diese Kugeln heißen **Dandelinsche Kugeln**.

Beweis:

Am einfachsten kann man sich dies dynamisch verdeutlichen:

In einen (Doppel-)Kegel kann man beliebig viele Kugeln einbeschreiben, so daß diese den Kegelmantel in einem Kreis berühren. Der Mittelpunkt dieser Kugeln liegt hierbei stets auf der Kegelachse.

Wenn nun der Kegel zusätzlich von einer Ebene geschnitten wird, so müssen die einbeschriebenen Kugeln ebenfalls die Bedingung erfüllen, diese Ebene zu berühren. Es ist anschaulich klar, daß es bei der Ellipse und bei der Hyperbel zwei eindeutig bestimmbare Kugeln gibt, die dem genügen:

Wir betrachten hierzu den Aufriß in Abbildung 3.4 (also die Ebene, die senkrecht zur Schnittebene E liegt und die Kegelachse enthält): Gegeben sei ein beliebiger Kreis, welcher die beiden Mantelgeraden berührt. Er hat mit der Schnittgeraden entweder einen, keinen oder zwei Punkte gemeinsam. Im ersten Fall ist der Kreis bereits der gesuchte, da die Gerade eine Tangente darstellt. Im zweiten Fall blähen wir den Kreis – unter Beachtung der Voraussetzung, daß er weiterhin die beiden Mantelgeraden berührt – solange auf, bis er die Schnittgerade tangiert. Im dritten Fall verkleinern wir den Kreis derart, daß die beiden Schnittpunkte von Kreis und Gerade zusammenfallen.

In jedem der Fälle berührt der Kreis schließlich die beiden Mantelgeraden und die Schnittgerade; es sind demnach drei Punkte des Kreises und damit der gesamte Kreis eindeutig vorgegeben.

Im Fall der Parabel liegt die zweite Kugel im Unendlichen und ist unendlich groß, wie man sich mit Abbildung 3.4 verdeutlichen kann (der Berührpunkt der Dandelinschen Kugel mit der Schnittebene ist der (unendlich ferne) Schnittpunkt der Schnittebene mit der eingezeichneten Mantelgeraden). ◊

Definition 3.6:

Die Berührpunkte der Dandelinschen Kugeln mit der Schnittebene heißen **Brennpunkte** des jeweiligen Kegelschnitts.

Anmerkungen:

- Dieser Begriff entstand aus folgendem physikalischen Grund:
  Ein Strahl (Licht, Geräusch), der in einem der beiden Brennpunkte einer Ellipse startet, wird derart an dem Kegelschnitt reflektiert, daß er in den anderen Brennpunkt fällt.
  Die mathematische Begründung hierfür folgt im nächsten Kapitel.
- Aus Satz 3.5 können wir folgern, daß es bei der Ellipse und der Hyperbel im Endlichen zwei Brennpunkte F_1 und F_2 gibt; bei der Parabel hingegen gibt es im Endlichen nur einen Brennpunkt F, während der zweite Berühr- und Brennpunkt im Unendlichen liegt.
- Vergleichen wir die Abbildungen 3.3 und 3.4 miteinander, so wird sofort klar, daß die beiden Brennpunkte eines Kegelschnitts auf der in Korollar 3.4 bestimmten Symmetrieachse liegen.