# 5 Die Parabel

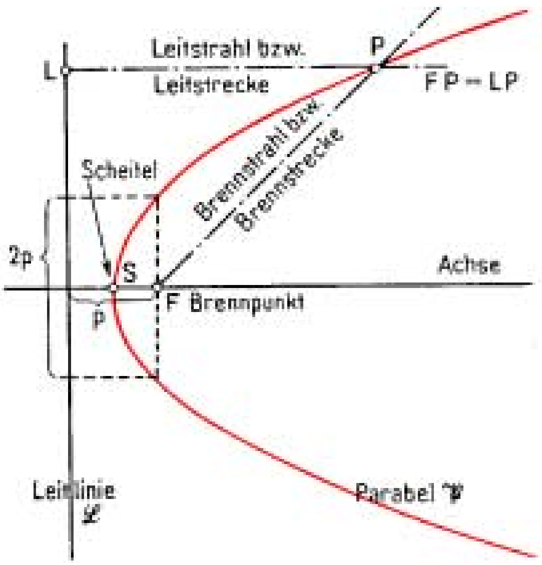


**Abb. 5.1** [GüSt]

Die Parabel hat im Vergleich mit den anderen Kegelschnitten die Besonderheit, daß sie im Endlichen lediglich einen Brennpunkt besitzt. Meyers Konversations-Lexikon [Mey] drückte dies im Jahre 1877 derart aus:

„In der Geometrie heißt **Parabel** derjenige Kegelschnitt, welchen man erhält, wenn man einen Kegel durch eine Ebene schneidet, die parallel zu einer Erzeugenden liegt. Sie besteht aus einem Zweig, der sich nach einer Seite hin ins Unendliche erstreckt [...]. Der Punkt F der Achse [...] heißt der Brennpunkt; eine auf der anderen Seite des Scheitels in der gleichen Entfernung von letzterem gelegene, zur Achse senkrechte Gerade heißt die Directrix. Jeder Punkt der Parabel ist gleich weit entfernt von der Directrix und dem Brennpunkt."

Wir wollen nunmehr auch für eine Parabel die wichtigsten geometrischen und analytischen Merkmale herleiten.

## 5.1 Geometrische Eigenschaften

Auch bei der Parabel werde ich anfangs zuerst die bedeutendsten Begriffe definieren:

***Definition 5.0:***

Eine **Parabel** entsteht, wenn ein Kegel von einer Ebene geschnitten wird, welche zu genau einer Mantelgeraden parallel verläuft.

***Definition 5.1:***

a) Die Gerade l, in welcher die Schnittebene E die durch den Berührkreis der Dandelinschen Kugel festgelegte Ebene $E_1$ schneidet, heißt **Leitgerade** oder **Leitlinie** (früher meist als **Directrix** bezeichnet).

b) Das Lot vom Brennpunkt F auf die Leitgerade l wird als **Achse** bezeichnet. Sie ist die Symmetriegerade der Parabel.

c) Ist P ein Punkt der Parabel, so heißt die Gerade durch F und P **Brennstrahl** und die Strecke FP **Brennstrecke**.

d) Ist P ein Punkt der Parabel und L der Fußpunkt des Lotes von P auf die Leitlinie l, dann nennen wir die Gerade LP **Leitstrahl** und die dazugehörige Strecke **Leitstrecke**.

e) Die Entfernung des Brennpunktes zur Leitlinie wird als **Parameter** p einer Parabel bezeichnet.

f) Der Schnittpunkt der Achse mit der Parabel heißt **Scheitel** S.

Zuerst werden wir die für die Parabel charakteristische Eigenschaft mit Hilfe der Dandelinschen Kugel bestimmen:

***Satz 5.2:***

Für jeden Punkt P einer Parabel gilt, daß er vom Brennpunkt F und von der Leitgeraden l gleich weit entfernt ist. Mit anderen Worten:

> Für jeden Punkt P einer Parabel ist die Brennstrecke genauso groß wie die Leitstrecke, d.h.
>
> $$\overline{PF} = \overline{PL}\ .$$
>
> Umgekehrt liegen alle Punkte P, die von einer Geraden und einem fest vorgegebenen Punkt denselben Abstand haben, auf einer Parabel.

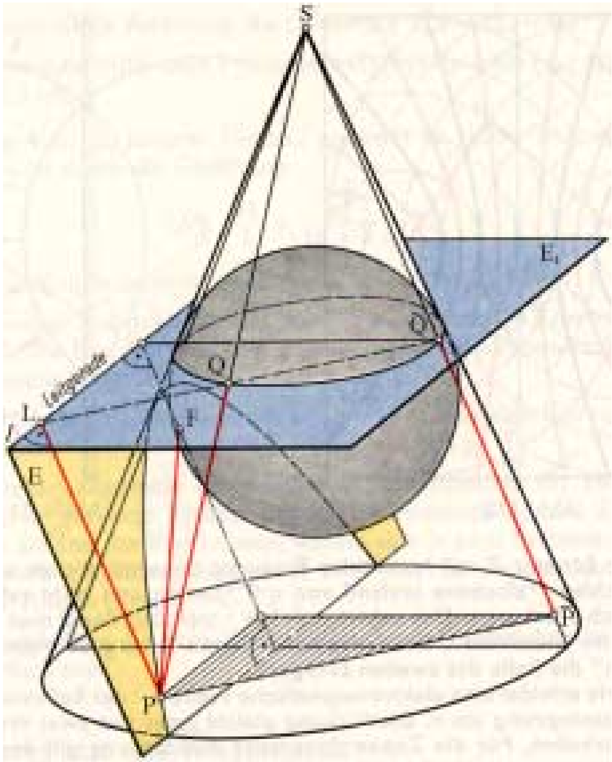


**Abb. 5.2** [Hon*]

<u>Beweis (siehe Abb. 5.2):</u>

Die Dandelinsche Kugel berühre die Schnittebene E im Punkt F und den Kegel in einem Kreis, der in der Ebene $E_1$ liegt. Dann ist die Leitgerade l nach Definition der Schnitt von E und $E_1$.

Wir betrachten nun einen beliebigen Punkt P der Parabel. Sei S die Kegelspitze. Sei Q derjenige Punkt, in welchem die Gerade PS die Ebene $E_1$ und damit den Berührkreis der Dandelinschen Kugel trifft. Sei ferner L der Fußpunkt des Lotes von P auf l. Die Gerade $S\tilde{Q}\tilde{P}$ sei diejenige Mantelgerade, die parallel zur Schnittebene E ist.

Dann gilt: $\overline{PF} = \overline{PQ}$, da beide Geraden Tangenten an die Dandelinsche Kugel sind; $\overline{PQ} = \overline{\tilde{P}\tilde{Q}}$, da die Punkte P, $\tilde{P}$ und Q, $\tilde{Q}$ der Mantelgeraden in zueinander parallelen Ebenen liegen. Außerdem gilt: $\overline{\tilde{P}\tilde{Q}} = \overline{PL}$, da $P\tilde{P}\tilde{Q}L$ aufgrund der Konstruktion ein Parallelogramm ist.

Zusammen folgt: $\overline{PF} = \overline{PQ} = \overline{\tilde{P}\tilde{Q}} = \overline{PL}$, also $\overline{PF} = \overline{PL}$. ◊

Anmerkung:
Aus Satz 5.2 folgt, daß der Scheitelpunkt sowohl vom Brennpunkt als auch von der Leitlinie den Abstand p/2 besitzt.

***Definition 5.3:***
Wir sagen: Ein Punkt P liegt ...
- **außerhalb** der Parabel, wenn gilt: $\overline{FP} > \overline{LP}$;
- **innerhalb** der Parabel, wenn gilt: $\overline{FP} < \overline{LP}$.

Für die Parabel möchte ich in diesem Abschnitt zwei unterschiedliche Konstruktionsmöglichkeiten beschreiben: Die punktweise Konstruktion mit Zirkel und Lineal und die Fußpunktkonstruktion.

***Lemma 5.4:*** (Punktweise Konstruktion)
Um eine Parabel mit Zirkel und Lineal konstruieren zu können, benötigt man lediglich den Brennpunkt und die Leitlinie.

Beweis:
Sei F der Brennpunkt, l die Leitlinie, wobei der Abstand von Brennpunkt und Leitlinie p betrage.

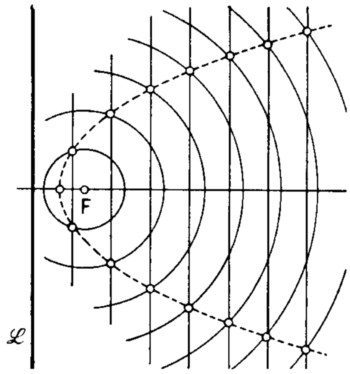


**Abb. 5.3** [GüSt]

Wir zeichnen nun Kreise um F mit den Radien n·a mit a < p und n∈**N**. Anschließend konstruieren wir zu l parallele Geraden mit dem Abstand n·a von der Leitlinie.

Dann sind nach Satz 5.2 die beiden Schnittpunkte der Geraden mit den Kreisen für gleiche n Punkte der gesuchten Parabel. ◊

***Lemma 5.5:*** (Fußpunktkonstruktion)

Wird bei der auf Seite 18 beschriebenen Fußpunktkonstruktion eine Gerade g als Kurve und ein beliebiger, nicht auf g liegender Punkt $F_1$ als vorgegebener Punkt verwendet, so erhalten wir als Fußpunktkurve K eine Parabel. Dabei ist $F_1$ der Brennpunkt und diejenige Parallele h zu g die Leitlinie der Parabel, welche von g den gleichen Abstand hat wie $F_1$ von g.

Beweis:

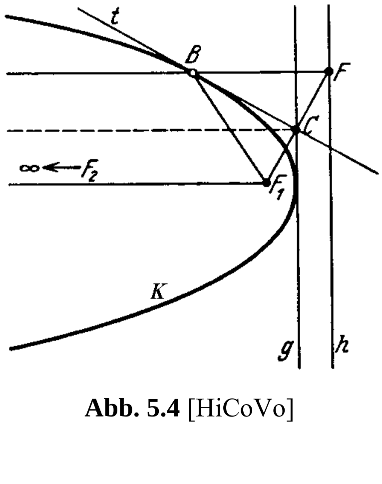


**Abb. 5.4** [HiCoVo]

Wir gehen bei dieser Konstruktion sehr ähnlich vor wie bei der Ellipse:

Gegeben seien ein Punkt $F_1$ und eine nicht mit diesem inzidente Gerade g. Wir zeichnen nun eine nicht zu g parallele, durch $F_1$ führende Gerade. Diese schneide g im Punkt C. Der Punkt F liege auf dieser Geraden, wobei gilt: $\overline{CF} = \overline{CF_1}$. Die Gerade t sei die Senkrechte zu $F_1F$ in C.

Wollen wir nun wie bei der Ellipse den Punkt $F_2$ ermitteln, so müssen wir das Lot von $F_1$ auf g fällen. Der Punkt $F_2$ entsteht dabei im Unendlichen. Die Gerade durch F, die $F_2$ enthält, ist die Parallele zur Geraden $F_1F_2$, also das Lot von F auf g. Der Schnittpunkt dieses Lotes mit t ist der Parabelpunkt B.

Aufgrund der Kongruenz $\Delta\ F_1CB \cong \Delta\ FCB$ (SWS) gilt: $\overline{BF_1} = \overline{BF}$. Für verschiedene Punkte C von g durchläuft F eine Gerade h, die den Bedingungen unserer Behauptung genügt. Dabei entsteht die Parabel K als Hüllkurve der Geraden t bzw. als Ortslinie der verschiedenen Punkte B.

Daß t eine Tangente ist, zeigen wir durch Satz 5.6, der Tangenten von Parabeln behandelt. ◊

Wir werden uns zum Abschluß dieses Abschnitts mit Tangenten beschäftigen:

***Satz 5.6:***

Sei eine Parabel mit Brennpunkt F und Leitlinie l gegeben. Sei P ein beliebiger Punkt der Parabel und L das Lot dieses Punktes auf l. Dann gilt: Die Halbierende t des Winkels $\angle FPL$ ist Tangente an die Parabel in P.

Beweis:

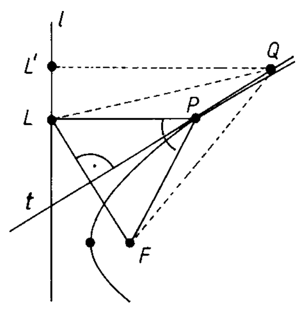


**Abb. 5.5** [Scheil]

Da P auf der Parabel liegt, gilt: $\overline{FP} = \overline{LP}$. Demnach ist das Dreieck $\Delta$ FPL gleichschenklig. Die Symmetrieachse dieses Dreiecks ist die Gerade t durch den Punkt P, die somit den Winkel $\angle$FPL halbiert und senkrecht auf der Geraden FL steht.

Angenommen, die Gerade t träfe die Parabel in einem weiteren Punkt Q. Für diesen Punkt müßte dann gelten: $\overline{FQ} = \overline{L'Q}$, wobei L′ der Fußpunkt des Lotes von Q auf l ist. Dies ist aber offensichtlich falsch, da aufgrund der Symmetrie des Dreiecks $\Delta$ FQL gilt: $\overline{FQ} = \overline{LQ}$, wobei $\overline{LQ} > \overline{L'Q}$ ist. Also hat t mit der Parabel nur den Punkt P gemeinsam und ist somit eine Tangente. ◊

> ***Korollar 5.7:*** (Konstruktion der Parabeltangenten)
> Sind von einer Parabel die Leitlinie und der Brennpunkt vorgegeben, so ist es möglich, eine Tangente an diese Parabel zu konstruieren.

Beweis:

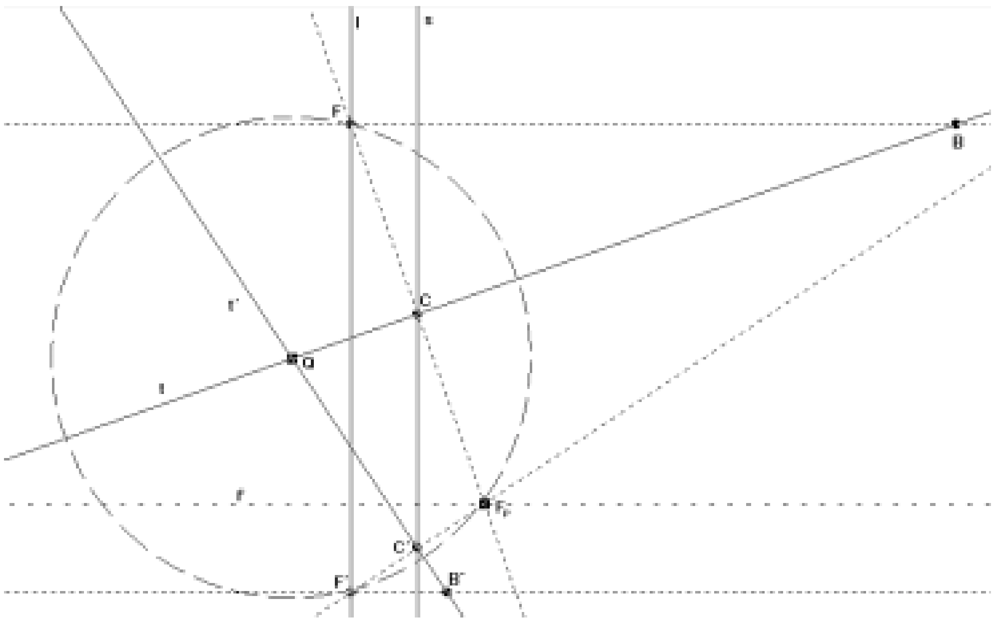


**Abb. 5.6**

Seien von einer Parabel die Leitlinie l und der Brennpunkt $F_P$ gegeben (wir benötigen aber nicht die Kurve der Parabel!). Die zu l orthogonale Gerade durch $F_P$ ist dann die

Parabelachse f. Sei Q ein Punkt außerhalb der Parabel. Um nun die beiden Tangenten zu konstruieren, gehen wir ähnlich vor wie bei der Ellipse und nutzen die aus dem Beweis der Fußpunktkonstruktion bekannten Überlegungen aus.

Wir schlagen um Q einen Kreis mit Radius $\overline{QF_P}$, dieser schneidet die Leitlinie l in den Punkten F und F´.

Anschließend konstruieren wir die Scheiteltangente s, also die Mittelsenkrechte des Lotes von $F_P$ auf l. Die Geraden $F_PF$ und $F_PF´$ schneiden diese Gerade in den Punkte C und C´.

Dadurch entstehen die beiden Parabeltangenten t := QC bzw. t´ := QC´, deren Berührungspunkte B bzw. B´ bestimmt werden durch den Schnitt der Geraden t bzw. t´ mit dem Lot von F bzw. F´ auf l. ◊

***<u>Korollar 5.8:</u>***

Jeder Punkt außerhalb einer Parabel besitzt genau zwei Tangenten an diese.

<u>Beweis:</u>

Folgt direkt aus der Konstruktionsweise im Beweis zu Korollar 5.7. ◊

## 5.2 Analytische Eigenschaften

In diesem Kapitel wollen wir die Gleichung einer Parabel aufstellen; außerdem werden wir uns mit den Lagebeziehungen einer Geraden zu einer Parabel befassen. Wir verwenden dazu im folgenden ein kartesisches Koordinatensystem. Die Parabelachse verlaufe hierbei parallel zur $x_1$-Achse.

***<u>Satz 5.9:</u>*** (Parabelgleichung in Achsenform)

Eine Parabel mit Scheitel $S = (s_1|s_2)$, deren Achse parallel zur $x_1$-Achse verläuft, genügt der Gleichung: $(x_2-s_2)^2 = 2\cdot p\cdot(x_1-s_1)$ mit dem Parameter p. Diese Gleichung heißt **Scheitelpunktsform der Parabelgleichung** oder kurz **Scheitelgleichung**.

<u>Beweis:</u>

Wir reduzieren das Problem zuerst auf eine Parabel, deren Scheitel sich im Ursprung O = (0|0) befindet. Die Parabelachse ist dann identisch mit der $x_1$-Achse.

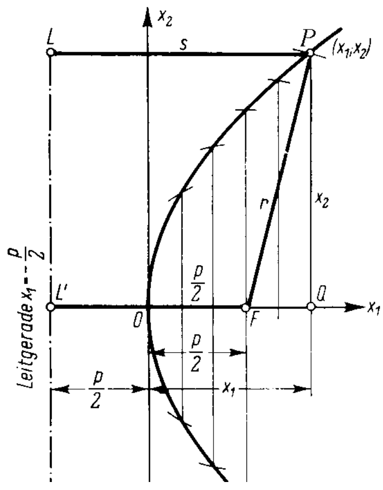


**Abb. 5.7** [Hon]

Nach Satz 5.2 gilt nunmehr für einen beliebigen Punkt $P = (x_1|x_2)$ der Parabel:

$$\overline{PF} = \overline{PL} \iff r = s \iff \sqrt{x_2^2 + (x_1 - \frac{p}{2})^2} = x_1 + \frac{p}{2}.$$

Dies läßt sich nun rasch umformen zu:

$$x_2{}^2 + (x_1 - \frac{p}{2})^2 = (x_1 + \frac{p}{2})^2 \Longleftrightarrow x_2{}^2 + x_1{}^2 + \frac{p^2}{4} - p \cdot x_1 = x_1{}^2 + \frac{p^2}{4} + p \cdot x_1 \Longleftrightarrow x_2{}^2 = 2 \cdot p \cdot x_1$$

Die Anwendung der Translation $x_1 \to x_1 - s_1$, $x_2 \to x_2 - s_2$ liefert dann die gewünschte Gleichung. ◊

Anmerkung:

Die Scheitelgleichung zeigt gut die Bedeutung des Parameters p: Um so größer p ist, um so stärker ist die Parabel geöffnet.

Wir betrachten im folgenden stets eine Parabel mit Scheitel im Ursprung, also der Form: $x_2^2 = 2 \cdot p \cdot x_1$.

***Lemma 5.10:*** (Gleichung einer Tangenten)

Die Tangente an eine Parabel mit dem Berührpunkt $\overline{P} = (\overline{x}_1 \mid \overline{x}_2)$ genügt der Gleichung:

$$x_2 \cdot \overline{x}_2 = p \cdot (x_1 + \overline{x}_1).$$

Beweis:

Gegeben sei eine Parabel mit Scheitel im Ursprung O und Leitlinie l.

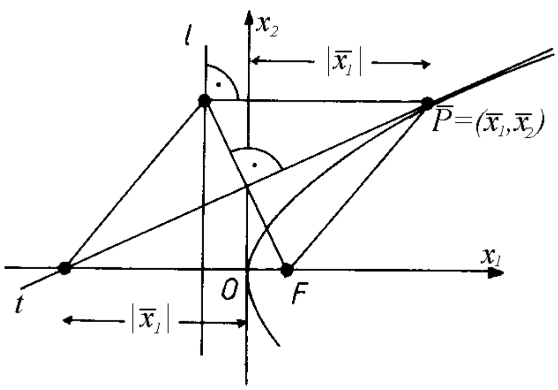


**Abb. 5.8** [Schei2]

Aufgrund der Lage der Parabel gilt für eine Tangente t mit Berührpunkt $\overline{P}$, daß sie die $x_1$-Achse im Punkt $(-\overline{x}_1 \mid 0)$ schneidet und das Steigungsmaß $\frac{\overline{x}_2}{2 \cdot \overline{x}_1}$ besitzt. Sie hat dann folgende Gleichung: $x_2 = \frac{\overline{x}_2}{2 \cdot \overline{x}_1} \cdot x_1 + \frac{\overline{x}_2}{2}$. Durch Multiplizieren mit $\overline{x}_2$ erhält man: $x_2 \cdot \overline{x}_2 = \frac{\overline{x}_2{}^2}{2} \cdot (\frac{x_1}{\overline{x}_1} + 1)$. Setzt man nun die Bedingung dafür ein, daß $\overline{P}$ ein Parabelpunkt ist ($\overline{x}_2{}^2 = 2 \cdot p \cdot \overline{x}_1$), so erhält man als Ergebnis: $x_2 \cdot \overline{x}_2 = p \cdot (x_1 + \overline{x}_1)$.

◊

**_Satz 5.11:_**

Gegeben seien eine Parabel und eine Gerade g: $x_2 = m \cdot x_1 + n$. Definiert man die Diskriminante durch $\Delta := p - 2 \cdot m \cdot n$, so gilt für die Lagebeziehung zwischen der Parabel und der Geraden:

$$\Delta < 0 <=> \text{g ist eine Passante.}$$
$$\Delta = 0 <=> \text{g ist eine Tangente.}$$
$$\Delta > 0 <=> \text{g ist eine Sekante.}$$

Beweis:

Wir wollen zunächst die möglichen Schnittpunkte der Geraden mit der Parabel bestimmen. Hierzu berechnen wir deren $x_1$-Koordinaten, indem wir die Gleichungen der beiden Kurven gleichsetzen:

$$2 \cdot p \cdot x_1 = (m \cdot x_1 + n)^2 <=> m^2 \cdot x_1{}^2 + n^2 + 2 \cdot m \cdot n \cdot x_1 - 2 \cdot p \cdot x_1 = 0$$

$$<=> x_1{}^2 + 2 \cdot \frac{m \cdot n - p}{m^2} \cdot x_1 + \frac{n^2}{m^2} = 0$$

$$<=> x_{1_{I/II}} = \frac{p - m \cdot n}{m^2} \pm \frac{\sqrt{p \cdot (p - 2 \cdot m \cdot n)}}{m^2}$$

Hierbei mußten wir voraussetzen, daß $m^2 \neq 0$, also $m \neq 0$ ist. Für $m = 0$ ergibt sich sonst als Geradengleichung $x_2 = n$ und als $x_1$-Koordinate des Schnittpunkts: $x_1 = \frac{n^2}{2 \cdot p}$. Man erhält zwar nur einen Schnittpunkt zwischen der Parabel und der Geraden, dennoch ist diese *keine* Tangente, da sie nicht der in Lemma 5.10 formulierten Tangentengleichung genügt.

Wir betrachten nun wieder die letzte Gleichung: Da p stets größer als 0 ist, ist die Anzahl der Schnittpunkte abhängig von der Diskriminante $\Delta := p - 2 \cdot m \cdot n$.

Ist $\Delta > 0$ / $\Delta = 0$ / $\Delta < 0$, so gibt es genau zwei / genau einen / keinen reellen Schnittpunkt; demnach ist g dann eine Sekante / Tangente / Passante. ◊

## 5.3 Anwendungen

a) Konstruktionsmöglichkeiten:

Für die Ellipse haben wir in Kapitel 4.3 drei verschiedenartige Wege zur Konstruktion kennengelernt. Für eine Parabel gibt es – außer der punktweisen Konstruktion – nur eine bedeutende Möglichkeit, die jedoch praktisch nahezu wertlos ist.

*Die Faden-Konstruktion:*

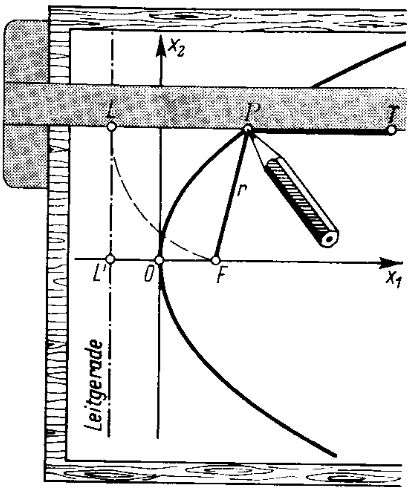


**Abb. 5.9** [Hon]

Diese auf Satz 5.2 beruhende Konstruktionsweise war schon Menaechmus im vierten Jahrhundert vor Christus bekannt.

Für sie benötigen wir ein Lineal mit angelegtem Rechtwinkeldreieck oder – wie in Abbildung 5.9 zu sehen – eine an einer Brettkante verschiebbare Reißschiene. Ein Faden wird zum einen an der Schiene im Punkt T, zum anderen auf dem Brett im Punkt F (als Brennpunkt) befestigt.

Bewegt man nun die Schiene und spannt gleichzeitig mit einem Stift den Faden (im Punkt P), so formen diese Punkte – bei zügiger Bewegung – eine Parabel.

Leider ist diese Konstruktionsweise sehr unhandlich, was ihren praktischen Nutzen stark herabsetzt.

b) Parabeln in der Umwelt:

In der Physik kommen Parabeln häufig vor: Man denke dabei nur an das Problem eines schrägen Wurfes, bei dem man eine Wurfparabel bestimmen muß, oder an die Ablenkung von geladenen Teilchen im elektrischen Feld.

In Analogie zur Ellipse möchte ich hier jedoch nur die Anwendung der Brennpunkt-Eigenschaft einer Parabel beschreiben.

*Parabeln als Spiegel:*

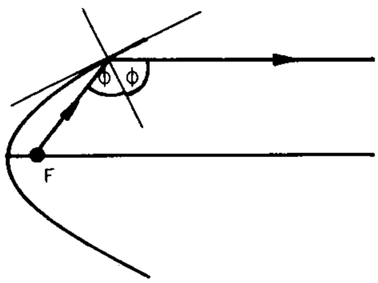


**Abb. 5.10** [Schei2]

Befindet sich im Brennpunkt einer Parabel eine Lichtquelle, so werden nach Satz 5.6 alle Strahlen als achsenparallele Strahlen reflektiert. Umgekehrt werden alle einfallenden achsenparallelen Strahlen in den Brennpunkt gebündelt.

Die erste Eigenschaft (Entstehung paralleler Strahlen) findet vor allem Anwendung bei Parabolspiegeln, zum Beispiel als Scheinwerfer. Diese haben die Form von durch Rotation einer Parabel um ihre Achse entstandenen Drehparaboloiden.

Die Umkehrung wird als Sonnenofen genutzt, bei dem die parallelen Sonnenstrahlen in einem (Brenn-) Punkt gebündelt werden, um Feuer zu erzeugen; diese Tatsache hatte erstmals Diokles um 180 vor Christus in einer Arbeit „Über Brennspiegel" veröffentlicht. Außerdem wird diese Methode bei Spiegelteleskopen und Parabolantennen verwendet.

c) Lösung klassischer Probleme:

In Kapitel 2 haben wir drei klassische, „unlösbare“ Probleme kennengelernt, die mit zur „Entdeckung“ der Kegelschnitte beigetragen haben. Eines dieser Probleme ließ sich nun mit Parabeln lösen, wie ich im folgenden darstellen möchte.

*Die Verdopplung eines Würfels (Delisches Problem):*

Die Vorgeschichte dieses Problems wurde bereits im Kapitel 2 ausführlich dargestellt; dabei wurden die algebraischen Lösungen hergeleitet. An dieser Stelle soll die erste der beiden Lösungen besprochen werden.

Menaechmus hatte im vierten Jahrhundert vor Christus herausgefunden, daß sich die Gleichung $x^3 = 2 \cdot a^3$ durch zwei Parabeln lösen läßt, die – in heutiger Schreibweise – den Gleichungen (1) $y^2 = 2a \cdot x$, (2) $x^2 = a \cdot y$ genügen. Die x-Koordinate des Schnittspunkts S der beiden Parabeln ist die gesuchte Größe (siehe Abbildung 5.11).

Es ist also möglich, dieses Problem zwar nicht mit Zirkel und Lineal allein, aber unter Verwendung zweier Parabeln zu lösen. Als große Schwierigkeit stellte sich nun heraus, daß man Parabeln nicht exakt konstruieren kann (siehe Abschnitt 5.3a)).

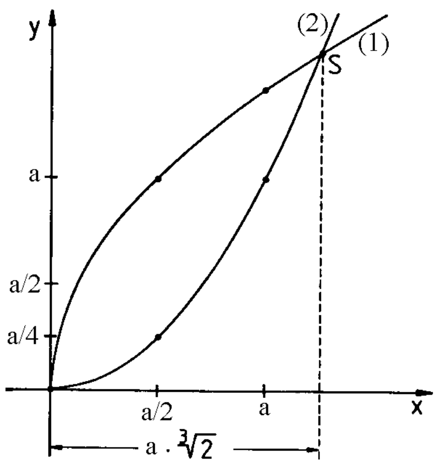


**Abb. 5.11** [Schu*]

Ist es nun möglich, den Punkt S einfacher als über die Konstruktion zweier Parabeln zu ermitteln?

Wir betrachten dazu die Kurve $(x^2–a·y) + (y^2–2·a·x) = 0$, die sich als Summe der beiden Gleichungen (1) und (2) ergibt. Der Punkt S ist Teil dieser Kurve. Nach einfacher Umformung erhält man:

$$(x-a)^2+(y-\frac{a}{2})^2=\frac{5}{4}\cdot a^2.$$

Dies ist die Gleichung eines Kreises mit Radius $\frac{\sqrt{5}}{2}\cdot a$, dessen Mittelpunkt die Koordinaten $(a\,|\,\frac{a}{2})$ besitzt.

Es ist also möglich, das Delische Problem durch die Konstruktion eines Kreises (die exakt möglich ist) und lediglich einer Parabel zu lösen.

Zur Verdeutlichung sei hier das Beispiel a = 1 angeführt (siehe Abbildung 5.12). Wir wollen nun die Zahl $\sqrt[3]{2}$ konstruieren:

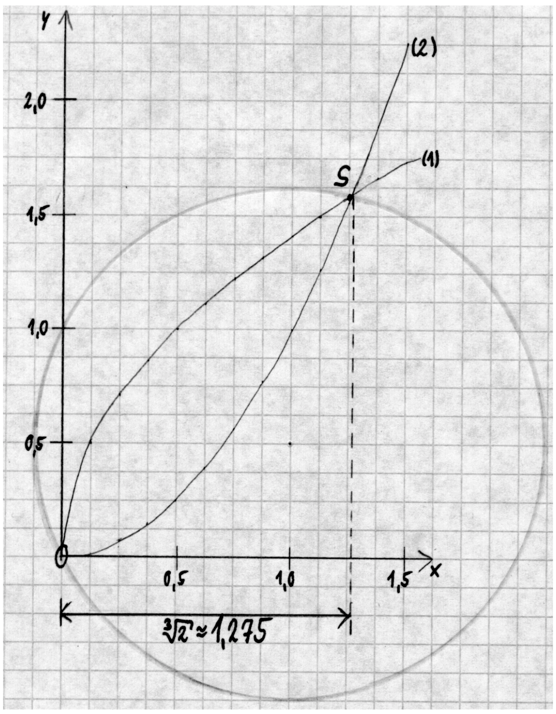


**Abb. 5.12**

Diese ergibt sich als Schnittpunkt der beiden Parabeln (1) $y = \sqrt{2 \cdot x}$, (2) $y = x^2$. Gemäß unseren Überlegungen können wir aber eine der beiden Gleichungen durch den Kreis: $(x-1)^2 + (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{5}{4}$ mit dem Radius $\frac{\sqrt{5}}{2}$ = 1,118... ≈ 1,12 und dem Mittelpunkt $(1 | \frac{1}{2})$ ersetzen.

Als x-Koordinate des Schnittpunkts S erhalten wir graphisch: 1,275, also gilt: $\sqrt[3]{2} \approx 1{,}275$.

Der algebraisch exakte Wert von S lautet: 1,2599...; das zeichnerische Ergebnis stellt also einen guten Näherungswert dar und ließe sich durch einen größeren Maßstab und feinere Konstruktion noch verbessern.