



## 4.1 Geometrische Eigenschaften

Die oben erwähnte „charakteristische Eigenschaft“ einer Ellipse läßt sich am einfachsten unter Verwendung der bereits erwähnten Dandelinschen Kugeln begründen. Zuvor möchte ich aber nochmals kurz die Definition der Ellipse wiederholen und anschließend die wichtigsten Begriffe definieren.

**Definition 4.0:**

Eine **Ellipse** entsteht, wenn ein Kegel von einer Ebene geschnitten wird, welche zu keiner Mantelgeraden parallel verläuft.

**Definition 4.1:** (siehe Abb. 4.1)

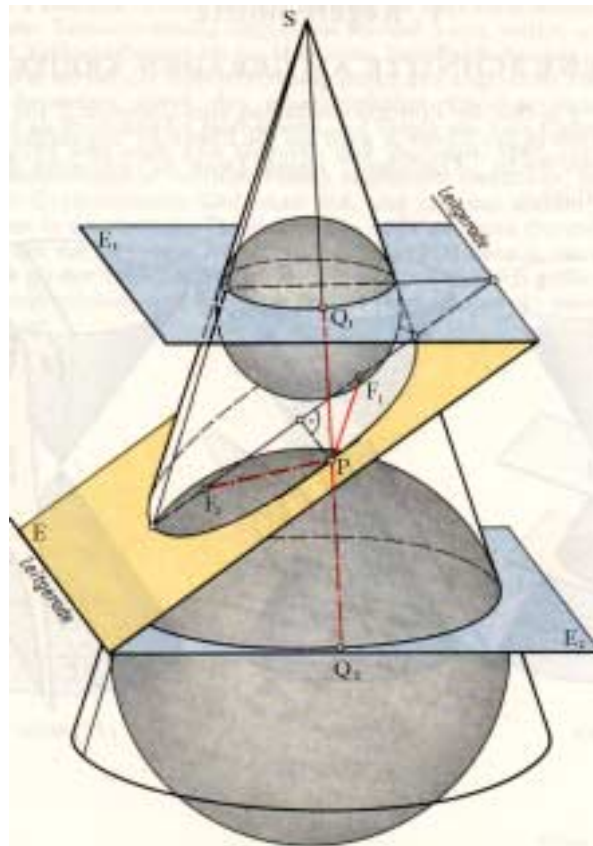
- a) Wir nennen denjenigen Punkt **Mittelpunkt** einer Ellipse, der von den beiden Brennpunkten den gleichen Abstand hat und auf ihrer Verbindungsgerade liegt.
- b) Die Verbindungsgerade der beiden Brennpunkte heißt **Hauptachse** einer Ellipse. Die Lotgerade des Mittelpunktes auf die Hauptachse heißt **Nebenachse**. Die Schnittpunkte der Ellipse mit der Hauptachse bezeichnen wir als **Hauptscheitel**, diejenigen mit der Nebenachse als **Nebenscheitel**.
- c) Der Abstand Mittelpunkt – Nebenscheitel heißt **kleine Halbachse**; seine Länge wird im allgemeinen mit  $b$  bezeichnet.  
Der Abstand Mittelpunkt – Hauptscheitel heißt **große Halbachse**; seine Länge wird im allgemeinen mit  $a$  bezeichnet.  
Gilt  $a = b$ , so ist die Ellipse zu einem Kreis entartet.
- d) Die Verbindungsgeraden der Brennpunkte mit einem Punkt auf der Ellipse heißen **Brennstrahlen**, die dazugehörigen Strecken **Brennstrecken**.
- e) Der **Leitkreis**  $l_1$  einer Ellipse ist der Kreis um den Brennpunkt  $F_1$  mit dem Radius  $2a$  (analog für  $l_2$  und  $F_2$ ).

**Satz 4.2:**

Für jeden Punkt P einer Ellipse, welche die Brennpunkte  $F_1$  und  $F_2$  besitzt und deren große Achse die Länge  $2a$  ( $a \in \mathbf{R}^+$ ) hat, gilt:

$$\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = \text{konstant} = 2a$$

(hierbei ist  $\overline{PF_1}$  die Länge der Strecke  $PF_1$ ).



**Abb. 4.2** [Hon\*]

**Beweis (siehe Abb. 4.2):**

Die beiden Dandelinschen Kugeln berühren die Schnittebene E in den Punkten  $F_1$  und  $F_2$ ; außerdem berührt jede von ihnen den Kegelschnitt in einem Kreis, die in den zueinander parallelen Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  liegen. Die Entfernung der beiden Kreise voneinander, gemessen entlang einer Mantelgeraden, betrage  $2a$ .

Wir betrachten nun einen Punkt P auf der Ellipse. Wenn man diesen mit der Kegelspitze S verbindet, berührt die Gerade PS die Dandelinschen Kugeln in  $Q_1$  und  $Q_2$ , es gilt also:  $\overline{Q_1Q_2} = 2a$ .

Da  $P$  in der Ebene  $E$  liegt, welche Tangente an beide Kugeln ist, sind somit auch die Geraden  $PF_1$  und  $PF_2$  Tangenten an diese Kugeln.

Da zwei Tangentenabschnitte an eine Kugel durch denselben außen liegenden Punkt gleich lang sind (dies ergibt sich sofort, wenn man die Ebene betrachtet, in der beide Tangenten (an einen Kreis!) liegen), folgt somit:  $\overline{PQ_1} = \overline{PF_1}$ ,  $\overline{PQ_2} = \overline{PF_2}$ .

Nun gilt aber:  $2a = \overline{Q_1Q_2} = \overline{PQ_1} + \overline{PQ_2}$  und damit auch  $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$  mit  $a \in \mathbf{R}^+$ . ◇

**Korollar 4.3:** (Umkehrung von Satz 4.2)

Seien  $F_1$  und  $F_2$  zwei feste Punkte. Ist nun die Summe der Abstände von beliebigen Punkten  $P$  zu diesen festen Punkten konstant, so liegen die Punkte  $P$  auf einer Ellipse.

Beweis:

Da alle Schritte des Beweises von Satz 4.2 in beide Richtungen möglich sind, haben wir gleichzeitig auch das Korollar 4.3 bewiesen. ◇

**Definition 4.4:**

a) Wir sagen:

Ein Punkt  $P$  liegt **innerhalb** der Ellipse, wenn gilt:  $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} < 2a$ .

Ein Punkt  $P$  liegt **außerhalb** der Ellipse, wenn gilt:  $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} > 2a$ .

b) Die **lineare Exzentrizität**  $e$  einer Ellipse ist definiert als Abstand des Mittelpunkts der Ellipse zu einem der Brennpunkte. Trivialerweise gilt:  $e := \sqrt{a^2 - b^2}$  (siehe Abb. 4.1).

c) Die **numerische Exzentrizität** einer Ellipse ist  $\varepsilon := \frac{e}{a}$ .

Anmerkungen:

- Die Exzentrizitäten sind unabhängig davon, welchen Brennpunkt wir betrachten (da der Mittelpunkt von beiden Brennpunkten gleich weit entfernt ist).
- Der Begriff „Exzentrizität“ kommt folgendermaßen zustande: Für einen Kreis ( $\omega = 90^\circ$ ) gilt  $a = b$ , also  $e = \varepsilon = 0$ . Die beiden Brennpunkte fallen mit dem Mittelpunkt zusammen. Eine Ellipse entsteht nun aus dem Kreis dadurch, daß die Brennpunkte aus dem *Zentrum* (= Mittelpunkt) des Kreises herausbewegt werden.
- „Linear“ bedeutet, daß die Exzentrizität von einer Länge abhängig ist, während die „numerische“ Exzentrizität durch ein Längenverhältnis und somit durch die Form der Ellipse bestimmt wird.
- Die numerische Exzentrizität wird in Kapitel 7.1 noch näher behandelt werden.

**Lemma 4.5:** (Punktweise Konstruktion)

Sind von einer Ellipse die beiden Brennpunkte und die Länge der großen Achse gegeben, so ist es möglich, Punkte auf dieser Ellipse lediglich mit Zirkel und Lineal zu konstruieren.

Beweis:

In Abbildung 4.3 ist dies für einen speziellen Fall zu sehen, bei dem  $a = 5$  cm beträgt.

Man geht dabei folgendermaßen vor:

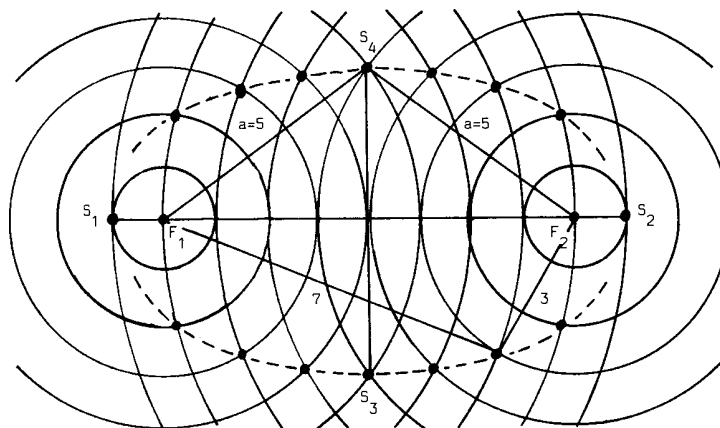


Abb. 4.3 [Schei2]

Nach Satz 4.2 gilt für jeden Punkt einer Ellipse, daß die Summe seiner Abstände zu den Brennpunkten gleich  $2a$ , der Länge der großen Achse, ist. Wir konstruieren also eine Ellipse punktweise, indem wir um den einen Brennpunkt einen Kreis mit dem beliebigen Radius  $r \leq 2a$  schlagen, um den zweiten einen Kreis mit dem Radius  $r' = 2a - r$ ; die Schnittpunkte dieser beiden Kreise sind zwei Punkte unserer Ellipse. Führen wir dies für verschiedene Radien  $r$  aus, so erhalten wir beliebig viele Punkte der Ellipse.  $\diamond$

**Korollar 4.6:**

Eine Ellipse ist achsensymmetrisch zu ihrer Haupt- und Nebenachse und damit punktsymmetrisch zu ihrem Mittelpunkt.

**Beweis:**

Die Symmetrie zur Hauptachse haben wir in Korollar 3.4 gezeigt.

Die Symmetrie zur Nebenachse (die von  $F_1$  und  $F_2$  den gleichen Abstand hat) ergibt sich aus der Konstruktionsweise von Lemma 4.5, indem wir die Radien der Kreise um  $F_1$  und  $F_2$  vertauschen, was die Form der Ellipse nicht ändert.

Die Punktsymmetrie folgt aus der Kombination der beiden Achsensymmetrien, da sich die Achsen nach Definition im Ellipsenmittelpunkt schneiden.  $\diamond$

Eine weitere Möglichkeit, eine Ellipse zu konstruieren, besteht in der sogenannten Fußpunktkonstruktion.

Unter dieser Konstruktionsweise versteht man allgemein, daß man von einem fest vorgegebenen Punkt  $F$  das Lot auf alle Tangenten  $t$  an eine vorgegebene Kurve  $K$  fällt. Die Fußpunkte dieser Lote beschreiben dann eine neue, Fußpunktkurve genannte Kurve  $k$ .

Umgekehrt können wir  $K$  konstruieren, indem wir  $F$  mit jedem Punkt von  $k$  verbinden und die durch diese Punkte gehenden Lotgeraden  $t$  bilden. Diese Geraden  $t$  umhüllen dann eine neue Kurve  $K$ , sind also Tangenten an diese.

**Lemma 4.7:** (Fußpunktkonstruktion)

Verwenden wir bei der eben beschriebenen Fußpunktkonstruktion als Kurve  $k$  einen Kreis und als vorgegebenen Punkt  $F_1$  ( $F_1 \neq M$ ) einen Punkt im Innern dieses Kreises, so erhalten wir als Fußpunktkurve  $K$  eine Ellipse mit  $F_1$  als einem Brennpunkt.

Beweis:

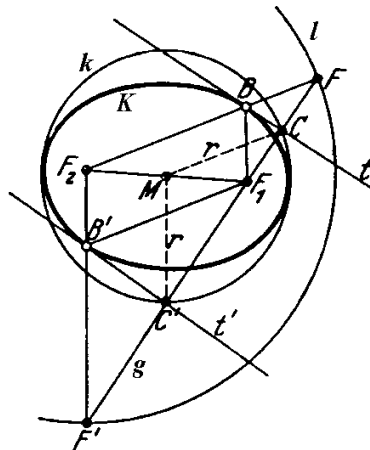


Abb. 4.4 [HiCoVo\*]

Sei  $F_1$  der vorgegebene Punkt und  $k$  der Kreis mit Mittelpunkt  $M$  und Radius  $r$ . Dabei ist zu beachten, daß sich  $F_1$  im Innern von  $k$  befindet (sonst entsteht eine Hyperbel, siehe Kapitel 6.1).

Wir legen nun durch  $F_1$  eine beliebige Gerade  $g$ . Diese schneidet  $k$  in den Punkten  $C$  und  $C'$ . Nun bilden wir die Punkte  $F$  und  $F'$  auf  $g$ , die folgenden Bedingungen genügen:  $\overline{FC} = \overline{F_1C}$ ,  $\overline{F'C'} = \overline{F_1C'}$ . Anschließend fallen wir das Lot  $t$  von  $C$  auf  $g$  bzw. das Lot  $t'$  von  $C'$  auf  $g$ .

Nun konstruieren wir einen Punkt  $F_2$  so, daß  $F_1$ ,  $F_2$  und  $M$  kollinear sind und  $M$  der Mittelpunkt der Strecke  $F_1F_2$  ist. Die Gerade  $F_2F$  schneide dann  $t$  im Punkt  $B$ , die Gerade  $F_2F'$  wiederum  $t'$  im Punkt  $B'$ .

Dadurch entstehen zwei Paare kongruenter Dreiecke:  $\triangle CBF \cong \triangle CBF_1$  und  $\triangle C'B'F' \cong \triangle C'B'F_1$ . Es gilt also  $\overline{BF} = \overline{BF_1}$  und somit  $\overline{F_1B} + \overline{F_2B} = \overline{FF_2}$ .

Da  $M$  der Mittelpunkt von  $F_1F_2$  ist,  $C$  der Mittelpunkt von  $FF_1$ , folgt nunmehr mit dem Strahlensatz:  $\overline{FF_2} = 2 \cdot \overline{CM}$  mit  $\overline{CM} = r$ .

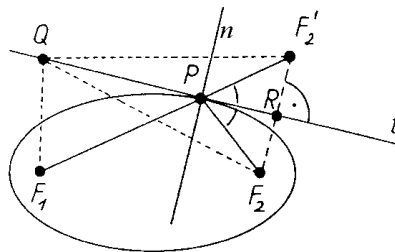
Dies ergibt:  $\overline{F_1B} + \overline{F_2B} = 2 \cdot r$ . Also liegen – nach Korollar 4.3 – alle Punkte B (die ja durch die beliebige Wahl der Geraden  $g = CC'$  entstanden sind) auf einer Ellipse mit den Brennpunkten  $F_1$  und  $F_2$ .

Nun müssen wir lediglich zeigen, daß die Gerade  $t$  in B Tangente an diese Ellipse ist (analog für  $t'$  in  $B'$ ). Dies ergibt sich unter Anwendung des folgenden Satzes 4.8 und seines Beweises, da durch  $t$  der Winkel  $\angle F_1BF$  halbiert wird (betrachte hierzu die kongruenten Dreiecke  $\triangle CBF \cong \triangle CBF_1$ ).  $\diamond$

**Satz 4.8:**

Sei P ein Punkt einer Ellipse mit den Brennpunkten  $F_1$  und  $F_2$ . Sei  $t$  die Tangente an diese Ellipse im Punkt P. Sei ferner  $n$  die **Normale** in P, das heißt die Senkrechte zur Tangenten durch den Punkt P. Dann gilt: Die Gerade  $n$  halbiert den Winkel  $\angle F_1PF_2$ .

Beweis:



**Abb. 4.5** [Schei1\*]

Sei P ein Punkt auf der Ellipse, seien  $F_1P$  und  $F_2P$  die beiden Brennstrahlen. Sei  $F_2'$  der Punkt, für den gilt:  $F_2' \in F_1P$  und  $\overline{F_2'P} = \overline{F_2P}$ . Dann ist das Dreieck  $\triangle F_2PF_2'$  gleichschenkelig. Sei nun  $t$  die Spiegelachse dieses Dreiecks, die demnach den Winkel  $\angle F_2PF_2'$  halbiert. Die Gerade  $t$  ist eine Tangente in P an die Ellipse, da für alle anderen Punkte Q von  $t$  nach der Dreiecksungleichung gilt:

$$\overline{F_1Q} + \overline{QF_2} = \overline{F_1Q} + \overline{QF_2'} > \overline{F_1F_2'} = \overline{F_1P} + \overline{PF_2'} = \overline{F_1P} + \overline{PF_2} = 2a, \text{ also } \overline{F_1Q} + \overline{QF_2} > 2a.$$



Da nun die Normale  $n$  senkrecht zur Tangenten ist, halbiert sie den Winkel  $\angle QPR$ . Es gilt:  $\angle F_1PQ \cong \angle F_2'PR$  (Scheitelwinkel) und  $\angle F_2'PR \cong \angle F_2PR$  ( $t$  ist Winkelhalbierende); somit folgt, daß  $n$  auch den Winkel  $\angle F_1PF_2$  halbiert.  $\diamond$

**Korollar 4.9:**

Die Menge der Punkte, die von einem Kreis und von einem Punkt im Innern dieses Kreises denselben Abstand haben, ist eine Ellipse.

Beweis:

Dies ergibt sich direkt aus der Fußpunkt konstruktion, wobei wir als Punkt den Brennpunkt  $F_1$  und als Kreis den Leitkreis  $l$  des Brennpunkts  $F_2$  benutzen (siehe Abbildung 4.4).  $\diamond$

**Korollar 4.10:** (Konstruktion der Ellipsentangenten)

Um eine Ellipsentangente durch einen vorgegebenen Punkt konstruieren zu können, benötigen wir lediglich die Brennpunkte und die große Achse dieser Ellipse.

Beweis:

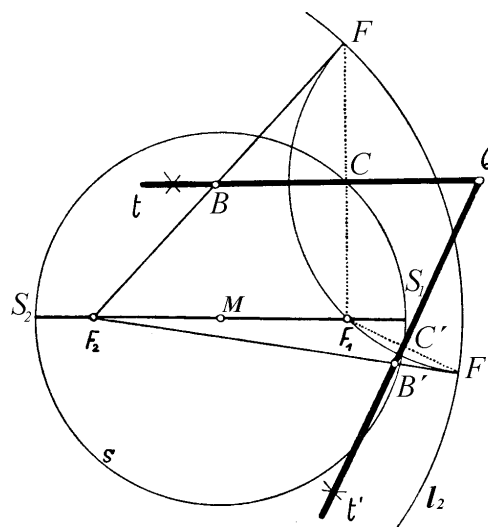


Abb. 4.6 [Poc\*]

Gegeben seien die beiden Brennpunkte  $F_1, F_2$  der Ellipse und ihre Hauptachse  $S_1S_2$ . Gesucht sind nun die beiden Tangenten an diese Ellipse durch einen vorgegebenen Punkt  $Q$ . Man kann sie folgendermaßen konstruieren (in Anlehnung an die Überlegungen bei der Fußpunkt konstruktion in Lemma 4.7), ohne vorher die Ellipse selbst konstruieren zu müssen:

Wir zeichnen den Leitkreis  $l_2$ , also den Kreis um  $F_2$  mit Radius  $2a = \overline{S_1S_2}$ . Außerdem schlagen wir um  $Q$  einen Kreis mit dem Radius  $\overline{QF_1}$ . Dieser schneide den Leitkreis in den Punkten  $F$  und  $F'$ .

Die Geraden  $F_1F$  und  $F_1F'$  treffen dann den Hauptscheitelkreis  $s$  (das ist der Kreis um den Mittelpunkt  $M$  der Strecke  $F_1F_2$  mit dem Radius  $a$ ) in den Punkten  $C$  und  $C'$ .

Die Geraden  $t := QC$  und  $t' := QC'$  sind dann die beiden Tangenten. Die Berührungspunkte  $B$  bzw.  $B'$  sind die Schnittpunkte der Geraden  $t$  bzw.  $t'$  mit der Geraden  $F_2F$  bzw.  $F_2F'$ . ◇

**Korollar 4.11:**

Durch jeden Punkt, der außerhalb einer Ellipse liegt, gehen genau zwei Tangenten an die Ellipse.

Beweis:

Es gibt zwei Möglichkeiten, dies zu zeigen:

- 1.) Die Behauptung folgt direkt aus dem Beweis von Korollar 4.10.
- 2.) Da die Behauptung bekanntermaßen für einen Kreis gilt, gilt sie auch für das affine Bild eines Kreises, also für Ellipsen (siehe Lemma 4.13). ◇

## 4.2 Analytische Eigenschaften

Im ersten Teil dieses Kapitels haben wir die rein geometrischen Eigenschaften einer Ellipse untersucht. Wir wollen uns nun dem analytischen Bereich zuwenden und dabei unter anderem Gleichungen für Ellipsen entwickeln. Dafür betrachten wir im folgenden stets ein kartesisches Koordinatensystem, wobei die Ellipsenachsen parallel zu den Koordinatenachsen liegen sollen.

**Satz 4.12:** (Ellipsengleichung in Achsenform)

Gegeben sei eine Ellipse mit den Halbachsen  $a$  und  $b$ , deren Mittelpunkt  $M$  die Koordinaten  $(m_1|m_2)$  hat. Dann sind genau diejenigen Kurven Ellipsen, die der folgenden Gleichung genügen:

$$\frac{(x_1 - m_1)^2}{a^2} + \frac{(x_2 - m_2)^2}{b^2} = 1.$$

Beweis:

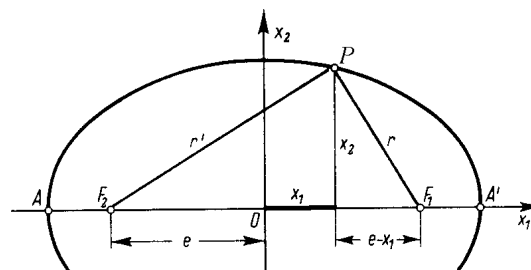


Abb. 4.7 [Hon]

Wir betrachten zuerst wie in Abbildung 4.7 eine Ellipse mit Mittelpunkt im Koordinatenursprung, das heißt  $M = O$  bzw.  $(m_1|m_2) = (0|0)$ . Sei  $P$  ein beliebiger Punkt der Ellipse.

Nach Satz 4.2 gilt:  $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = r + r' = 2a$ . Anders ausgedrückt:

$$\sqrt{(e - x_1)^2 + x_2^2} + \sqrt{(e + x_1)^2 + x_2^2} = 2a \Leftrightarrow \sqrt{(e + x_1)^2 + x_2^2} = 2a - \sqrt{(e - x_1)^2 + x_2^2}.$$

Durch Quadrieren und nach Division durch 4 ergibt sich:

$$a \cdot \sqrt{(e - x_1)^2 + x_2^2} = a^2 - e \cdot x_1 \Leftrightarrow (a^2 - e^2) \cdot x_1^2 + a^2 \cdot x_2^2 = a^2 \cdot (a^2 - e^2).$$

$$\text{Mit } e^2 = a^2 - b^2 \text{ erhält man: } b^2 \cdot x_1^2 + a^2 \cdot x_2^2 = a^2 \cdot b^2 \Leftrightarrow \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1.$$

Die Behauptung folgt dann direkt unter Berücksichtigung der Verschiebung des Mittelpunktes zu den Koordinaten  $(m_1|m_2)$ .  $\diamond$

Wichtig ist der folgende Hilfssatz, der zeigt, daß jede Ellipse das affine Bild eines Kreises ist (und umgekehrt).

**Lemma 4.13:**

- a) Die Ellipse  $E$  mit der Gleichung  $\frac{x_1'^2}{a^2} + \frac{x_2'^2}{b^2} = 1$  entsteht durch Stauchung eines Kreises  $K$  mit der Gleichung  $x_1^2 + x_2^2 = a^2$  unter Verwendung der Affinität  $x_1' = x_1$ ,  $x_2' = \frac{b}{a} \cdot x_2$ .
- b) Jede Tangente an den Kreis  $K$  geht hierbei in eine Tangente an die Ellipse  $E$  über.

Beweis:

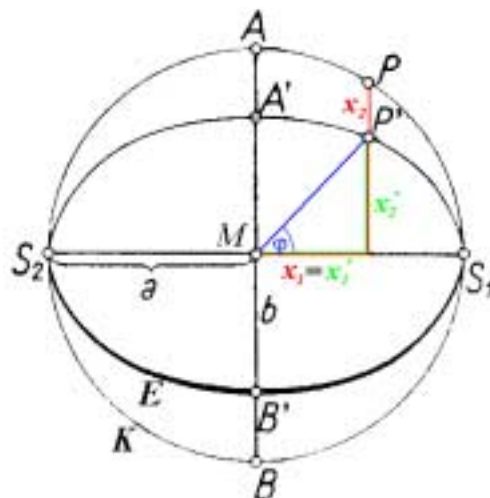


Abb. 4.8 [GüSt\*]

- a) Trivial.
- b) Sei  $t$  eine Tangente im Punkt  $P$  an den Kreis  $K$ . Durch die eben definierte affine Abbildung ändern sich Inzidenzen nicht, das bedeutet  $t$  geht über in eine Gerade  $t'$ , welche die Ellipse  $E$  lediglich in dem Bild  $P'$  von  $P$  berührt, also wieder eine Tangente ist.  $\diamond$

Wir betrachten im folgenden stets eine Ellipse mit der Gleichung  $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1$ , also eine Ellipse mit dem Mittelpunkt  $M = (0|0)$ .

**Korollar 4.14:** (Ellipsengleichung in Parameterform)

Sei  $\varphi$  der Winkel, den die  $x_1$ -Achse mit demjenigen Ortsvektor einschließt, der einen beliebigen Punkt  $P'$  der Ellipse mit deren Mittelpunkt  $M$  verbindet.

Dann gilt für jeden Punkt auf der Ellipse:

$$x_1 = a \cdot \cos \varphi, \quad x_2 = b \cdot \sin \varphi \quad \text{mit } \varphi \in [0; 2\pi[.$$

Beweis (siehe Abb. 4.8):

Für einen Punkt  $P$  auf dem Kreis gilt nach Definition:  $x_1 = a \cdot \cos \varphi$ ,  $x_2 = a \cdot \sin \varphi$  mit  $\varphi \in [0; 2\pi[$ . Nach Anwendung der affinen Abbildung aus Lemma 4.13a) folgt die Behauptung.  $\diamond$

Im folgenden wollen wir untersuchen, wie man anhand der Lagebeziehungen zwischen Gerade und Ellipse die Gleichung der Tangenten aufstellen kann. Aufgrund der affinen Verwandtschaft zwischen Kreis und Ellipse ist dies hier besonders einfach:

**Korollar 4.15:** (Gleichung einer Tangenten)

Sei  $E$  eine Ellipse. Eine Tangente, die  $E$  im Punkt  $\bar{P} = (\bar{x}_1 \mid \bar{x}_2)$  berührt, hat die Gleichung:

$$\frac{x_1 \cdot \bar{x}_1}{a^2} + \frac{x_2 \cdot \bar{x}_2}{b^2} = 1.$$

Beweis:

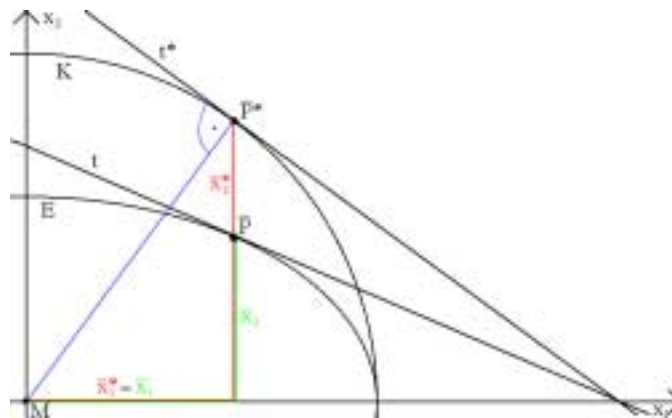


Abb. 4.9

Für den Beweis benutzen wir unsere Kenntnisse aus Lemma 4.13. Hierzu sei  $K$  der Kreis, der aus  $E$  durch die affine Abbildung  $x_1 \rightarrow x_1^* = x_1, x_2 \rightarrow x_2^* = \frac{a}{b} \cdot x_2$  hervorgeht.

Wir betrachten nun eine Tangente  $t^*$  an diesen Kreis durch den Punkt  $\bar{P}^* = (\bar{x}_1^* \mid \bar{x}_2^*) = (\bar{x}_1 \mid \bar{x}_2^*)$ , das Bild des Berührungspunktes  $\bar{P} = (\bar{x}_1 \mid \bar{x}_2)$ . Die blau gezeichnete Gerade  $M\bar{P}^*$  hat das Steigungsmaß  $\frac{\bar{x}_2^*}{\bar{x}_1}$ ; die zu ihr orthogonale Gerade  $t^*$  hat somit das Steigungsmaß  $-\frac{\bar{x}_1}{\bar{x}_2^*}$ , also  $-\frac{b \cdot \bar{x}_1}{a \cdot \bar{x}_2}$ .

Aus dem Steigungsmaß der Kreistangenten  $t^*$  ergibt sich direkt das Steigungsmaß der Ellipsentangenten  $t$ , indem wir mit dem Faktor  $\frac{b}{a}$  multiplizieren:

$-\frac{b^2 \cdot \bar{x}_1}{a^2 \cdot \bar{x}_2}$ . Somit hat die Tangente  $t$  im Punkt  $\bar{P}$  folgende Gleichung:

$$\frac{x_2 - \bar{x}_2}{x_1 - \bar{x}_1} = -\frac{b^2 \cdot \bar{x}_1}{a^2 \cdot \bar{x}_2}. \text{ Daraus folgt: } \frac{x_1 \cdot \bar{x}_1}{a^2} + \frac{x_2 \cdot \bar{x}_2}{b^2} = \frac{\bar{x}_1^2}{a^2} + \frac{\bar{x}_2^2}{b^2}.$$

Da der Punkt  $\bar{P}$  auf der Ellipse liegt, ist die rechte Seite der Gleichung 1, woraus die Behauptung folgt.  $\diamond$

**Satz 4.16:**

Seien die Ellipse  $E$  sowie eine beliebige Gerade  $g: x_2 = m \cdot x_1 + n$  gegeben. Sei  $\Delta := a^2 \cdot m^2 + b^2 - n^2$  die **Diskriminante**.

$$\text{Dann gilt: } \begin{cases} \Delta < 0 \Leftrightarrow g \text{ ist Passante von } E. \\ \Delta = 0 \Leftrightarrow g \text{ ist Tangente an } E. \\ \Delta > 0 \Leftrightarrow g \text{ ist Sekante von } E. \end{cases}$$

**Beweis:**

Wir setzen  $g$  in die Gleichung von  $E$  ( $b^2 \cdot x_1^2 + a^2 \cdot x_2^2 = a^2 \cdot b^2$ ) ein und erhalten daraus:

$$b^2 \cdot x_1^2 + a^2 \cdot (m^2 \cdot x_1^2 + 2 \cdot m \cdot n \cdot x_1 + n^2) - a^2 \cdot b^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a^2 \cdot m^2 + b^2) \cdot x_1^2 + 2 \cdot m \cdot n \cdot a^2 \cdot x_1 + a^2 \cdot (n^2 - b^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow x_1^2 + \frac{2 \cdot m \cdot n \cdot a^2}{a^2 \cdot m^2 + b^2} \cdot x_1 + \frac{a^2 \cdot (n^2 - b^2)}{a^2 \cdot m^2 + b^2} = 0$$

Bei der letzten Umformung haben wir vorausgesetzt, daß  $a^2 \cdot m^2 + b^2 \neq 0$  ist; dies ist aber wegen  $a, b > 0$  immer erfüllt.

Aus der letzten Gleichung ergeben sich sofort folgende Lösungen  $x_1$  für die möglichen Schnittpunkte zwischen einer Geraden und einer Ellipse:

$$x_{1_{I/II}} = -\frac{m \cdot n \cdot a^2}{a^2 \cdot m^2 + b^2} \pm \sqrt{\frac{m^2 \cdot n^2 \cdot a^4}{(a^2 \cdot m^2 + b^2)^2} - \frac{a^2 \cdot (n^2 - b^2)}{a^2 \cdot m^2 + b^2}}$$

$$\Leftrightarrow x_{1_{I/II}} = -\frac{m \cdot n \cdot a^2}{a^2 \cdot m^2 + b^2} \pm \frac{a \cdot b \cdot \sqrt{a^2 \cdot m^2 + b^2 - n^2}}{a^2 \cdot m^2 + b^2}$$

Der Radikant  $\Delta := a^2 \cdot m^2 + b^2 - n^2$  heißt dabei Diskriminante der Schnittpunktsgleichung von  $g$  und  $E$ . Für  $\Delta$  gibt es drei Fälle:

- $\Delta < 0 \Rightarrow$  Es gibt keine reelle Lösung für  $x_1$ .  $\Rightarrow$   $g$  ist eine Passante.
- $\Delta = 0 \Rightarrow$  Es gibt genau eine reelle Lösung für  $x_1$ .  $\Rightarrow$   $g$  ist eine Tangente.
- $\Delta > 0 \Rightarrow$  Es gibt genau zwei reelle Lösungen für  $x_1$ .  $\Rightarrow$   $g$  ist eine Sekante.

Wir haben damit nicht nur explizite Bedingungen für jeden der drei Fälle gefunden, sondern können durch Einsetzen des Ergebnisses  $x_1$  in die Gleichung der Geraden oder der Ellipse sofort die Schnittpunkte bzw. den Berührungspunkt bestimmen.  $\diamond$



### 4.3 Anwendungen

#### a) Konstruktionsmöglichkeiten:

In Lemma 4.5 wurde bereits die punktweise Konstruktion von Ellipsen aufgezeigt. An dieser Stelle möchte ich die drei wichtigsten Möglichkeiten zur Konstruktion einer Ellipse behandeln:

#### 1. Die Gärtner-Konstruktion:

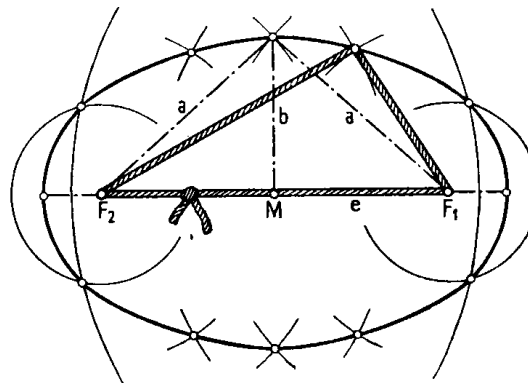


Abb. 4.10 [GüSt]

Dies ist die wohl bekannteste Methode. Sie beruht auf der Tatsache, daß die Summe der Abstände eines Punktes der Ellipse zu den beiden Brennpunkten stets konstant ist (Satz 4.2 und Korollar 4.3). Erstmals wurde sie von dem Erbauer der Hagia Sophia, Themios von Tralleis, im 6. Jahrhundert verwendet.

Man benötigt hierfür lediglich einen Faden, den man an zwei vorgegebenen Punkten befestigt (Brennpunkte  $F_1$  und  $F_2$ ) und einen den Faden spannenden Stift, der dann bei schneller und flüssiger Bewegung eine Ellipse umfährt.

#### 2. Die Papierstreifen-Konstruktion:

In Korollar 4.14 haben wir die Parameterdarstellung der Ellipsengleichung kennengelernt.

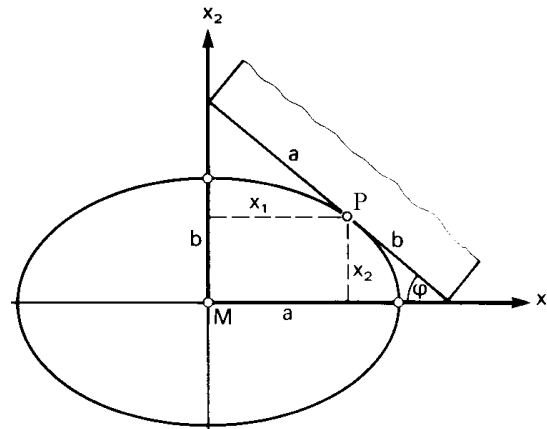


Abb. 4.11 [EcJeVo]

Für diese Konstruktionsweise benötigen wir eine Strecke der Länge  $a+b$ , bei der im Punkt P ein Stift eingespannt ist. Gleitet diese Strecke auf einem Paar zueinander orthogonalen Geraden, so beschreibt der Stift eine Ellipse.

Dieses Gerät, das erstmalig bei Proclus im 5. Jahrhundert aufgetaucht ist, fand als Ellipsenzirkel weite Verbreitung.

### 3. Die Stäbe-Konstruktion:

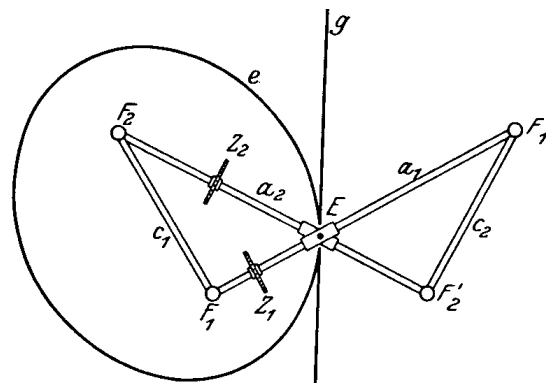


Abb. 4.12 [HiCoVo]

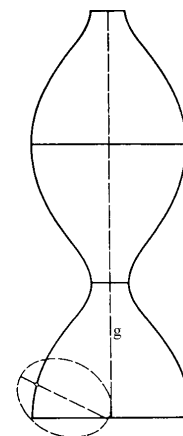


Abb. 4.13 [HiCoVo]

Diese Apparatur dient nicht nur dazu, Ellipsen zu konstruieren, sondern ist auch geeignet, um die Rollkurven der Ellipsenbrennpunkte darzustellen. Sie nutzt ebenfalls

die Eigenschaft  $\overline{PF_1} + \overline{PF_2} = 2a$  aus und wurde erstmals 1931 von R.C. Yates beschrieben.

Wir nehmen hierzu vier Stäbe, wobei die beiden Stäbe  $c_1, c_2$  die Länge  $c$  und die beiden Stäbe  $a_1, a_2$  die Länge  $2a$  (mit  $2a > c$ ) besitzen sollen. Sowohl  $c_1$  als auch  $c_2$  sind an ihren Enden derart mit den Enden von  $a_1$  und  $a_2$  verbunden, daß letztere sich überkreuzen. An diesem Schnittpunkt befindet sich ein Gelenk  $E$ , das erlaubt, daß die Stäbe  $a_1$  und  $a_2$  darin gleiten und den eingeschlossenen Winkel verändern können.

Wird nun die Stange  $c_1$  festgehalten, so umschreibt das bewegte Gelenk  $E$  eine Ellipse  $e$ , deren Brennpunkte  $F_1$  (das Gelenk zwischen  $c_1$  und  $a_1$ ) und  $F_2$  (das Gelenk zwischen  $c_1$  und  $a_2$ ) sind und deren große Achse die Länge  $2a$  hat.

Die Begründung hierfür sieht folgendermaßen aus:

Die Dreiecke  $\triangle F_1F_2F_2'$  und  $\triangle F_1F_1'F_2'$  sind kongruent, da sie paarweise gleich lange Seiten besitzen. Daraus folgt, daß  $\angle F_1F_2'F_2 \cong \angle F_2'F_1F_1'$ , somit ist das Dreieck  $\triangle F_1F_2'E$  gleichschenkelig. Demnach ist  $\overline{F_1E} + \overline{EF_2} = \overline{F_2'E} + \overline{EF_2} = 2a$ , also beschreibt  $E$  eine Ellipse.

Die genaue mathematische Herleitung der Rollkurve werde ich hier übergehen, da sie zu weit vom eigentlichen Thema wegführen würde. Ich möchte nur ein paar Erläuterungen angeben:

Zusätzlich zu dem eben geschilderten Aufbau werden an  $a_1$  und  $a_2$  die Zahnräder  $Z_1$  und  $Z_2$  so angebracht, daß sie nicht an den Stäben entlang gleiten können. Diese Zahnräder bewirken, daß sich die Stäbe  $a_1$  und  $a_2$  nur noch senkrecht zu ihrer Länge, das heißt vor- und rückwärts, bewegen können. Entfernt man nun den Stab  $c_1$  (d.h.  $F_1$  und  $F_2$  sind nicht mehr fixiert) und bewegt  $E$  auf einer beliebigen Kurve, so erhält man die Rollkurve der Ellipse  $e$  auf dieser Kurve.

Besonders wichtig ist die mit unserer Apparatur darstellbare Rollkurve der Ellipsenbrennpunkte  $F_2$  (linker Teil) und  $F_1'$  (rechter Teil), die in Abbildung 4.13 abgebildet ist. Sie entsteht, wenn sich  $E$  entlang der Geraden  $g$  bewegt ( $g$  ist Tangente an die Ellipse  $e$  im Punkt  $E$ ).

### b) Ellipsen in der Umwelt:

In diesem Abschnitt möchte ich zwei bedeutende Beispiele anführen, wo man im täglichen Leben Ellipsen begegnet.

#### 1. Ellipsen als Spiegel:

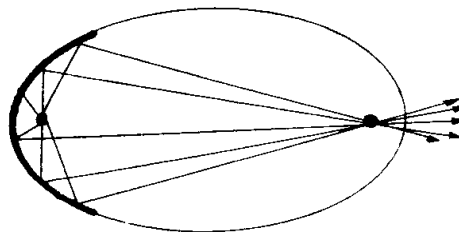


Abb. 4.14 [Schei2]

Diese Eigenschaft erklärt die Bedeutung des Begriffes „Brennpunkt“:

Befindet sich in einem Brennpunkt der Ellipse eine Lichtquelle, so werden alle ausgehenden Strahlen an der Ellipse derart reflektiert, daß sie im zweiten Brennpunkt gebündelt werden.

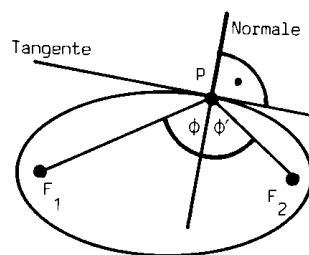


Abb. 4.15 [Schei2]

Dies folgt direkt aus Satz 4.8, da der Einfallswinkel  $\phi$  gleich dem Reflektionswinkel  $\phi'$  ist.

Diese Eigenschaft überträgt sich auch auf das Ellipsoid, das dadurch entsteht, daß eine Ellipse um ihre Hauptachse rotiert. Dies führt dazu, daß ein akustisches Signal, das in einem Brennpunkt gestartet wird, nur in dem anderen Brennpunkt laut und an den anderen Stellen des Ellipsoids nur sehr schwach hörbar ist. Ausgenutzt wurde

dies früher in sogenannten „Flüstergewölben“ (z.B. Statuary Hall in Washington D.C. (siehe die 2. Internet-Adresse in Kapitel 9)), heute beispielsweise in der Medizin, wo man mit dieser Methode durch Ultraschall sehr einfach Nierensteine ohne Beschädigung des umgebenden Gewebes zertrümmern kann.

## 2. Astronomie:

Johannes Kepler (1571-1630), von 1601 bis 1612 kaiserlicher Mathematiker in Prag, hatte 1602 die Vermutung, daß der Mars sich nicht auf einer kreisförmigen, sondern eher auf einer „ovalen“ Bahn bewegt. Nach weiteren Untersuchungen veröffentlichte er 1609 ein Werk mit dem Titel „Astronomia nova seu Physica coelestis tradita commentariis de motibus stellae Martis“ (dt.: „Neue Astronomie oder Physik des Himmels, dargestellt in Untersuchungen über die Bewegungen des Sternes Mars“), in dem er unter anderem erläuterte, daß sich alle Planeten des Sonnensystems auf Ellipsenbahnen bewegen, in deren einem Brennpunkt die Sonne steht.

Hundert Jahre später, im Jahre 1705, stellte Edmond Halley (1656-1724) fest, daß ein von ihm beobachteter Komet (der später nach ihm benannt wurde) sich ebenfalls auf einer Ellipsenbahn bewegt.

Auch künstliche Erdsatelliten bewegen sich auf Ellipsenbahnen, in deren einem Brennpunkt der Erdmittelpunkt liegt:

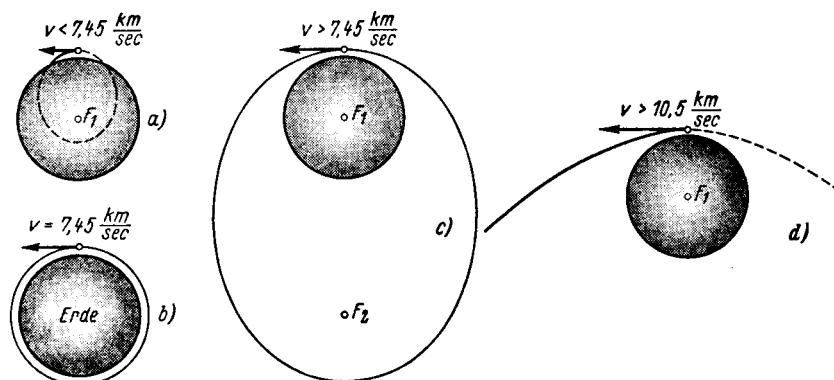


Abb. 4.16 [Hon\*]

Wir betrachten eine Rakete in 800 km Höhe, welche sich horizontal mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegt. Hierbei ist der Vergleich zwischen der durch ihre Geschwindigkeit hervorgerufenen Zentrifugalbeschleunigung und der Erdbeschleunigung entscheidend. Die Erdbeschleunigung beträgt in dieser Höhe ca.  $7,76 \text{ m/s}^2$ , was einer Geschwindigkeit von  $7,45 \text{ km/s}$  entspricht.

Man unterscheidet folgende vier Fälle (siehe Abbildung 4.16):

- a)  $v < 7,45 \text{ km/s}$ : Der Satellit stürzt in einer ellipsenförmigen Bahn auf die Erde zurück.
- b)  $v = 7,45 \text{ km/s}$ : Der Satellit bewegt sich in einer annähernd kreisförmigen Bahn um die Erde.
- c)  $7,45 \text{ km/s} < v < 10,5 \text{ km/s}$ : Der Satellit bewegt sich auf einer Ellipsenbahn.
- d)  $v > 10,5 \text{ km/s}$ : Die Bahnkurve des Satelliten ist Teil eines Hyperbelastes, in dessen einem Brennpunkt der Erdmittelpunkt liegt.