# 8 Kegelschnitte in der projektiven Geometrie

In diesem Kapitel möchte ich die Kegelschnitte aus Sicht der projektiven Geometrie behandeln. Dazu werde ich zuerst die wichtigsten Begriffe und Definitionen erläutern und anschließend die bedeutendsten Sätze anführen und beweisen.

Hauptquellen meiner Ausführungen sind die drei Bücher von Coxeter ([Cox1], [Cox2], [Cox3]); ich habe aber noch mehrere andere Werke zu Rate gezogen, die alle im Literaturverzeichnis am Ende dieser Arbeit zu finden sind.

## 8.1 Grundlegende Begriffe

In diesem Abschnitt werde ich wichtige Definitionen und Sätze besprechen, die wir für die projektive Behandlung von Kegelschnitten benötigen. Ich werde aber keine Beweise durchführen, da sie zu weit vom eigentlichen Thema wegführen, sondern lediglich auf die entsprechende Literatur verweisen.

***Definition 8.1:*** (Projektive Ebene)

a) Eine Ebene heißt **projektive Ebene**, wenn in ihr die folgenden Axiome gelten:
   (1) Durch zwei verschiedene Punkte geht genau eine Gerade.
   (2) Zwei verschiedene Geraden schneiden sich in genau einem Punkt.
   (3) Jede Gerade enthält mindestens drei verschiedene Punkte.
   (4) Es existieren mindestens zwei verschiedene Geraden.

b) Wir können die euklidische Ebene zur projektiven Ebene erweitern, indem wir fordern:
   - Jede Gerade besitzt genau einen unendlich fernen Punkt.
   - Die unendlich fernen Punkte bilden die unendlich ferne Gerade.

Wir betrachten im folgenden stets die projektive Ebene, die aus der euklidischen Ebene entsteht.

Der vermutlich wichtigste Satz der projektiven Geometrie ist das Dualitätsprinzip:

**<u>*Satz 8.2:*</u>** (Dualitätsprinzip)

Alle Sätze über projektiven Ebenen behalten ihre Gültigkeit, wenn man

*Punkt* und *Gerade*

*liegen auf* und *gehen durch*

vertauscht.

Punkte gehen also in Geraden, Geraden in Punkte über, während Inzidenzen erhalten bleiben.

<u>Beweis:</u>

Siehe [Cox3], Seite 231.

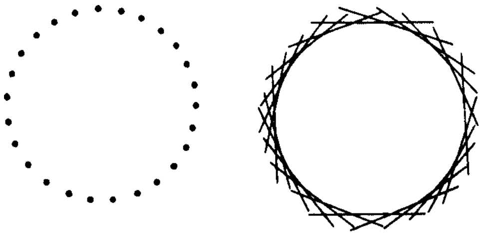


**Abb. 8.1** [Cox2]

Aus Satz 8.2 folgt zum Beispiel, daß wir jeden Kegelschnitt nicht nur als Ortskurve von Punkten auffassen können, sondern auch als Hüllkurve von Tangenten (siehe Abbildung 8.1). Dies haben wir bereits bei der Fußpunktkonstruktion ausgenutzt.

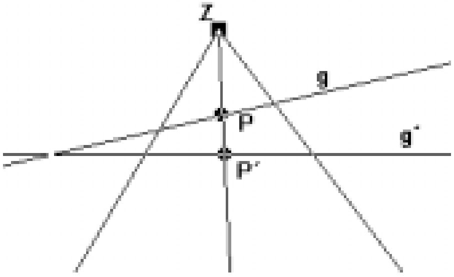


**Abb. 8.2a**

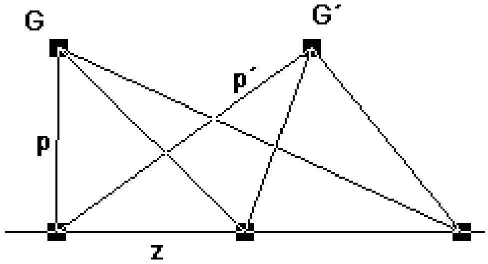


**Abb. 8.2b**

**<u>*Definition 8.3:*</u>** (Perspektive und projektive Abbildung)

a) Seien zwei Geraden g und g´ gegeben. Dann ordnet die **perspektive Abbildung mit Zentrum Z** (kurz: Perspektive) dem Punkt P auf g den Punkt P´ auf g´ zu, wobei Z, P und P´ kollinear sind (siehe Abbildung 8.2a). Wir bezeichnen dies mit: $P \overset{Z}{\underset{\wedge}{=}} P'$ oder kurz: $P \underset{\wedge}{=} P'$.

b) Wendet man mehrere perspektive Abbildungen hintereinander an, so lassen sich diese im allgemeinen nicht mehr als eine einzige perspektive Abbildung ausdrücken. Diese Hintereinanderausführung bezeichnen wir als **projektive Abbildung** (kurz: Projektivität) und kürzen sie ab durch: $P \underset{\wedge}{-} P'$.

c) Wird ein Punkt bei einer Projektivität festgelassen, so nennen wir ihn **Fixpunkt**.

<u>Anmerkungen:</u>

1. Die duale Formulierung von Definition 8.3a lautet (siehe Abb. 8.2b):
   Seien G, G´ zwei Punkte. Dann haben wir eine perspektive Abbildung von einer Geraden z aus gegeben, wenn die Schnittpunkte der Geraden p, p´ der beiden Büschel durch G bzw. G´ stets auf z liegen.

2. Zur Erläuterung einer perspektiven Abbildung siehe Abbildung 8.3:

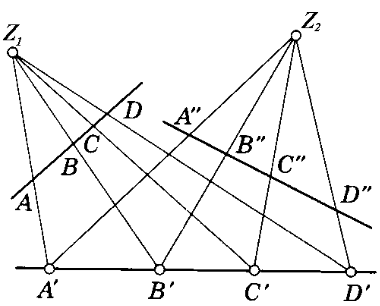


**Abb. 8.3** [Cox3*]

Hier gilt: $ABCD \overset{Z_1}{\underset{\wedge}{=}} A'B'C'D' \overset{Z_2}{\underset{\wedge}{=}} A''B''C''D''$. Es gibt nun zwar keine perspektive Abbildung, welche ABCD auf A´´B´´C´´D´´ abbildet (da sich die Geraden AA´´, BB´´, CC´´, DD´´ nicht in einem gemeinsamen Punkt schneiden), aber es existiert eine projektive Abbildung: $ABCD \underset{\wedge}{-} A''B''C''D''$.

**_Definition 8.4:_**

a) Wir bezeichnen als **Kollineation** einer projektiven Ebene die Abbildung, welche Punkte auf Punkte und Geraden auf Geraden abbildet. Ferner heißt eine Abbildung **Korrelation**, wenn Punkte auf Geraden und Geraden auf Punkte abgebildet werden. In beiden Fällen bleiben die Inzidenzen erhalten.

b) Eine Kollineation heißt **Involution**, falls sie die Periode 2 hat, das heißt sie vertauscht zwei Punkte miteinander.

c) Eine Korrelation heißt **Polarität**, falls sie die Periode 2 hat, das heißt wenn gilt: Wird ein Punkt P projektiv auf eine Gerade p und diese Gerade anschließend auf den Punkt P´ abgebildet, so gilt stets: P = P´.
Dabei ist P der **Pol** von p und p die **Polare** von P.

**_Satz 8.5:_**

Wir betrachten eine Polarität einer projektiven Ebene.
Liegt ein Punkt P auf einer Geraden q, so geht seine Polare p durch ihren Pol Q.
Wir nennen dann P und Q **konjugiert Punkte** bzw. p und q **konjugierte Geraden**.

Beweis:

Siehe [Cox2], Seite 137, Satz 6.11.

***Korollar 8.6:***

Ein Geradenbüschel durch einen Punkt P geht dual über in die Punkte seiner Polaren p (und umgekehrt).

Beweis:

Ergibt sich direkt aus Definition 8.4c und Satz 8.5. ◊

***Definition 8.7:***

a) Ein Punkt, der auf seiner eigenen Polaren liegt, heißt **selbstkonjugiert**.
b) Eine Polarität heißt **hyperbolisch**, wenn sie einen selbstkonjugierten Punkt besitzt, ansonsten **elliptisch**.

***Korollar 8.8:***

a) Es gibt sowohl hyperbolische als auch elliptische Polaritäten.
b) Eine nicht selbstkonjugierte Gerade, die einen selbstkonjugierten Punkt enthält, besitzt noch genau einen weiteren selbstkonjugierten Punkt.

Beweis:

a) Siehe [Cox1], Seite 74, Folgerung 6.23.
b) Siehe [Cox3], Seite 248, Satz 14.63.

Wie kann man die Polare zu einem vorgegebenen Punkt finden? Wie erhält man den Pol einer bestimmten Geraden?

In Kapitel 7.2 haben wir gesehen, daß jeder Kegelschnitt das projektive Bild eines Kreises ist. Aus diesem Grund behandeln wir zuerst Pole und Polaren für einen Kreis und gehen anschließend auf Besonderheiten bei Kegelschnitten ein.

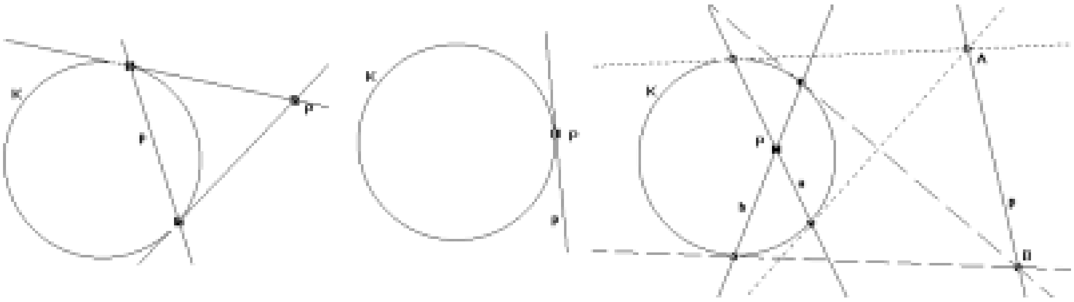


**Abb. 8.4**

***Definition 8.9:*** (Pol und Polare bei Kreisen)

- Für einen Punkt P *außerhalb* des Kreises K ist seine Polare p die Verbindungsgerade der Berührpunkte der beiden Tangenten an K durch P.
- Liegt ein Punkt P *auf* dem Kreis K, so ist die Tangente p an K durch P die dazugehörige Polare.
- Liegt P im *Innern* des Kreises K (mit P ≠ Mittelpunkt), so zeichnet man zwei beliebige Geraden a und b durch P. Die Pole dieser Geraden seien die Punkte A und B. Nach Satz 8.5 gilt nun, daß die Polare des Punktes P, der auf den Geraden a und b liegt, die Verbindungsgerade p ihrer Pole A, B ist.

Dann ist der Punkt P der zu p gehörende Pol.

Analog findet man den Pol P zu einer vorgegebenen Geraden p.

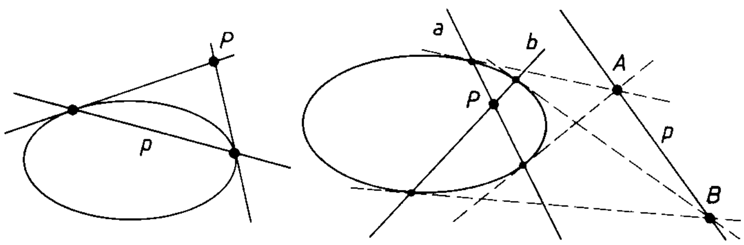


**Abb. 8.5a** [Schei1]

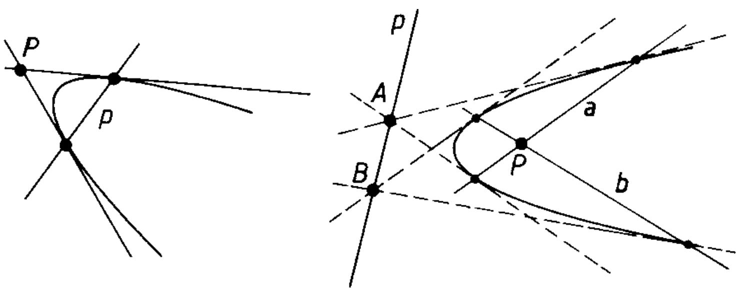


**Abb. 8.5b** [Schei1]

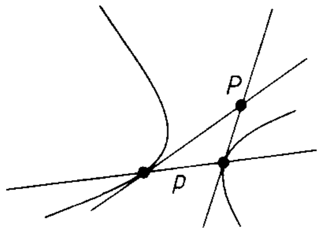


**Abb. 8.5c** [Schei1]

***Satz 8.10:*** (Pole und Polaren bei Kegelschnitten)

Alle Überlegungen aus Definition 8.9 gelten auch für Ellipsen, Parabeln und Hyperbeln (siehe Abbildung 8.5a-c).

Für die Spezialfälle gelten folgende Regeln (siehe Abbildungen 8.6 und 8.7):

- Die unendlich ferne Gerade ist die Polare zum Mittelpunkt eines Kegelschnitts.
- Die unendlich fernen Punkte sind die Pole von Geraden, die durch den Kegelschnittsmittelpunkt gehen.

  Bei Parabeln sind sie Pole von zur Parabelachse parallelen Geraden.
- Liegt ein Punkt P auf genau einer der Asymptoten einer Hyperbel, so ist die Polare p die zur Asymptoten parallele Gerade durch den Berührpunkt. Dann ist der Punkt P der zu p gehörende Pol.

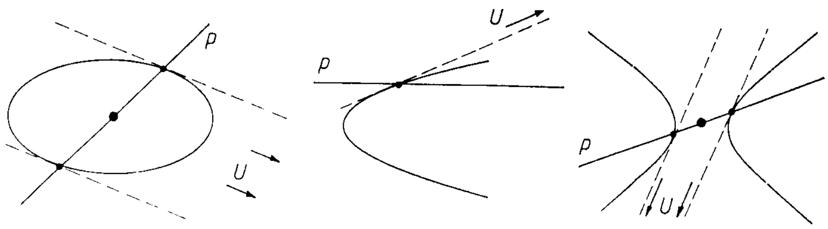


**Abb. 8.6** [Schei1]

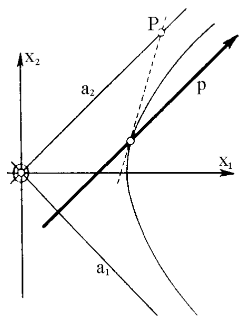


**Abb. 8.7** [GüSt*]

Beweis:

Siehe beispielsweise [Hon], § 45 (Seite 148ff.).

## 8.2 Definition und wichtige Sätze

Mit Hilfe der Bezeichnungen aus Abschnitt 8.1 haben wir nun die Grundbegriffe eingeführt und können uns der eigentlichen Behandlung von Kegelschnitten in der projektiven Geometrie zuwenden.

Ich möchte hier zuerst die beiden Möglichkeiten, einen Kegelschnitt in der projektiven Geometrie zu definieren, anführen. Die erste Definition ist relativ einfach; wir benötigen hierzu nur folgendes Lemma:

***Lemma 8.11:***

Eine hyperbolische Polarität besitzt nicht nur einen, sondern unendlich viele selbstkonjugierte Punkte.

Beweis:

Sei hierzu P ein selbstkonjugierter Punkt (dieser existiert nach Korollar 8.8a in jedem Fall). Nun betrachten wir eine beliebige Gerade g durch P, die nicht identisch ist mit seiner Polaren p. Diese Gerade ist nicht selbstkonjugiert.

(Angenommen, g wäre selbstkonjugiert. Dann läge ihr Pol G auf der Geraden g. Es gilt nach Satz 8.5: Da P auf g liegt, muß seine Polare p durch G gehen. G muß sowohl auf der Geraden g als auch auf der Geraden p liegen. Dies erfüllt aber nur der Schnittpunkt P von g und p, somit ist $P \equiv G$ und $p \equiv g$. Widerspruch zu $g \neq p$.)

Mit Hilfe von Korollar 8.8b folgt, daß die Gerade g einen weiteren selbstkonjugierten Punkt besitzen muß. Dies gilt aber für alle Geraden (außer p) durch P, also gibt es unendlich viele selbstkonjugierte Punkte. ◊

***Definition 8.12:***

Ein **Kegelschnitt** ist die Menge aller selbstkonjugierten Punkte einer hyperbolischen Polarität.

Anmerkung:

1. Diese Definition stammt von dem Deutschen **Christian v. Staudt** (1798-1867).
2. Wir haben sie bereits verwendet, ohne es zu wissen: Als wir uns in Abschnitt 8.1 damit beschäftigt haben, wie man bei den einzelnen Kegelschnittarten die Polare zu einem vorgegebenen Punkt findet, haben wir gesehen, daß genau für den Fall, daß der Punkt auf dem Kegelschnitt selbst liegt, seine Polare die Tangente an den Kegelschnitt durch eben diesen Punkt ist. Die einzigen selbstkonjugierten Punkte waren also die Kegelschnittpunkte, die einzigen selbstkonjugierten Geraden waren die Tangenten an den Kegelschnitt.
3. Von Staudt führte anschließend noch folgende Bezeichnungen für Kegelschnitte ein, die ich hier nur der Vollständigkeit halber anführen möchte. Die Gründe für diese Benennungen werden sofort deutlich, wenn man sich die Konstruktion von Polen und Polaren im vorigen Abschnitt anschaut.

***Bezeichnungen 8.13:***

Eine Gerade mit zwei selbstkonjugierten Punkten heißt **schneidende** Gerade. Ihr Pol ist ein **äußerer** Punkt.
Eine selbstkonjugierte Gerade nennt man **Tangente**, ihr Pol ist der **Berührpunkt**.
Eine Gerade ohne selbstkonjugierte Punkte bezeichnet man als **nicht schneidende** Gerade, ihren Pol als **inneren** Punkt.

Die zweite, ebenfalls weit verbreitete Definition stammt von **Jakob Steiner** (1796-1863). Wir werden sie als Folgerung aus Definition 8.12 herleiten. Sie wurde sinngemäß schon von Apollonius von Perga im 3. Jahrhundert vor Christus formuliert.

Zuvor benötigen wir noch folgenden Satz:

***Satz 8.14:*** (Satz von Seydewitz)

Sei ABC ein einem Kegelschnitt einbeschriebenes Dreieck. Jede Gerade, die zu einer Seite konjugiert ist, trifft die beiden anderen Seiten in konjugierten Punkten.

Beweis:

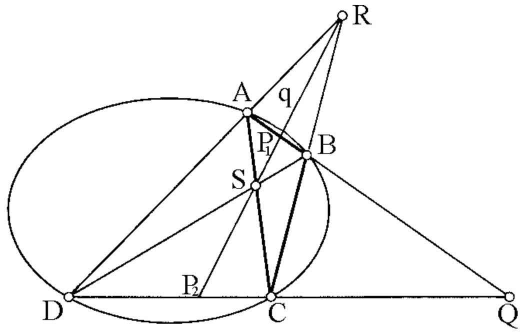


**Abb. 8.8** [Cox1*]

Sei ABC das einbeschriebene Dreieck. Wir betrachten o.B.d.A. die Seite AB. Sei q die zu AB konjugierte Gerade. Dann liegt nach Satz 8.5 der Pol Q von q auf der Geraden durch A und B.

Die Gerade CQ treffe nun den Kegelschnitt ein zweites Mal im Punkt D. Dann haben die sechs Seiten des dem Kegelschnitt einbeschriebenen Vierecks ABCD die drei Schnittpunkte Q, R (als Schnitt der Geraden BC und AD) sowie S (als Schnitt der Geraden AC und BD). Die Verbindungsgerade der Punkte R und S trifft die Dreiecksseite AB in $P_1$ und die Sehne CD in $P_2$.

Unter Verwendung des nachfolgenden Lemma folgt nunmehr, daß $P_1$ und Q bzw. $P_2$ und Q konjugierte Punkte sind. Also ist die Gerade RS die Polare q von Q.

Ganz analog folgert man, daß die Gerade SQ die Polare von R ist.

Im Dreieck QRS sind demnach zwei der Seiten Polare der gegenüberliegenden Eckpunkte. Es muß also auch die letzte Seite Polare des verbleibenden Eckpunktes sein, also ist die Gerade QR Polare von S.

Daraus folgt, daß R und S zwei konjugierte Punkte sind, die auf den Seiten unseres ursprünglichen Dreiecks ABC liegen. ◊

***Lemma 8.15:***

Seien A und B die Schnittpunkte einer Sekanten mit einem Kegelschnitt. Dann gilt für zwei Punkte P und Q auf dieser Sekanten, die durch A oder B voneinander getrennt werden, daß P und Q zueinander konjugiert sind.

Beweis:

Siehe [Cox1], Seite 77, Satz 6.41.

***Satz 8.16:*** (Satz von Steiner)

Seien P und Q zwei festgehaltene Punkte eines Kegelschnitts; sei ferner R ein beliebiger, veränderlicher Punkt desselben Kegelschnitts.

Für die beiden Geraden x := PR und y := QR gilt dann: $x \underset{\wedge}{-} y$ .

Beweis:

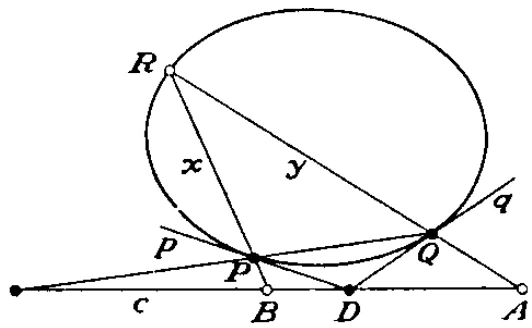


**Abb.8.9** [Cox1*]

Wir betrachten die Tangenten p und q an den Kegelschnitt in den Punkten P und Q. Diese schneiden sich im Punkt D, welcher per Definition der Pol der Geraden PQ ist. Sei nun c eine Gerade, welche den Punkt D enthält und den Kegelschnitt nicht schneidet oder berührt. Die Gerade c ist dann eine zu PQ konjugierte Gerade, da sie deren Pol enthält.

Die Sekante x schneide c in B, die Sekante y in A. Nach dem Satz von Seydewitz (Satz 8.14) sind nun A und B zwei konjugierte Punkte (betrachte das Dreieck PQR und die konjugierte Gerade c).

Verändern wir nun die Position des Punktes R auf dem Kegelschnitt, so gelten die beiden Korrelationen $x \underset{\wedge}{-} B, A \underset{\wedge}{-} y$ und die Kollineation $B \underset{\wedge}{-} A$ . Zusammen erhält man die projektive Abbildung: $x \underset{\wedge}{-} B \underset{\wedge}{-} A \underset{\wedge}{-} y$ , also: $x \underset{\wedge}{-} y$ . ◊

Die Umkehrung des Steinerschen Satzes möchte ich hier nicht beweisen, aber dennoch anführen (siehe zum Beweis [Cox1], Seite 80, Satz 6.54):

***<u>Satz 8.17:</u>***

Gegeben seien zwei veränderliche Geraden x und y durch die festen Punkte P und Q. Wenn hierbei gilt: $x \underset{\wedge}{-} y$, aber nicht $x \underset{\wedge}{=} y$, dann ist der Schnittpunkt von x und y ein Punkt des Kegelschnitts, der P und Q enthält.

***<u>Korollar 8.18:</u>*** (Fünf-Punkte-Kegelschnitt)

Fünf Punkte, von denen keine drei kollinear sind, bestimmen eindeutig einen Kegelschnitt.

<u>Beweis:</u>

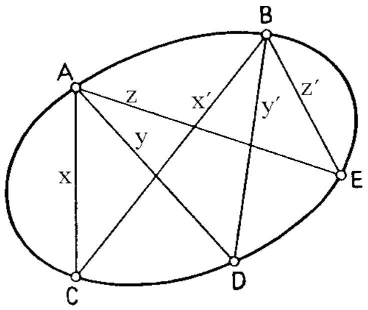


**Abb. 8.10** [GüSt*]

Wir betrachten die Punkte A, B, C, D, E. Dabei bilden die Geraden x, y und z ein Büschel in A und die Geraden x´, y´ und z´ ein Büschel in B wie in Abbildung 8.10 angegeben.

Die Behauptung folgt nun direkt aus Satz 8.17: A und B sind die beiden festen Punkte, während die Paare der gleichnamigen Büschelgeraden zwar eine projektive, aber keine perspektive Abbildung bestimmen. ◊

Den Abschluß diese Kapitels bildet der Satz von **Blaise Pascal** (1623-1662). Pascal hatte ihn bereits als 16jähriger Junge aufgestellt und bewiesen. Mit ihm begann er eine Abhandlung über Kegelschnitte („Essai pour les coniques“), die bedauerlicherweise verlorenging. Sie enthielt angeblich mehr als 400 Sätze über Kegelschnitte.

***__Satz 8.19:__*** (Satz von Pascal)
Gegeben sei ein einem Kegelschnitt einbeschriebenes Sechseck, dessen Seiten sich überlappen können.
Dann liegen die drei Schnittpunkte je zweier Gegenseiten auf einer gemeinsamen Geraden, der sog. **Pascalschen Geraden**.

<u>Beweis:</u>

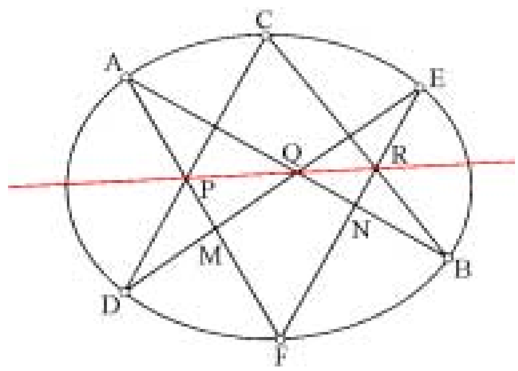


**Abb. 8.11** [Cox3]

Sei ABCDEF ein Sehnensechseck, das heißt ein dem Kegelschnitt einbeschriebenes Sechseck. Dabei seien die Punkte PQR definiert durch:

P := AF ∩ CD, Q := AB ∩ DE, R := BC ∩ EF.

Zu zeigen ist: P, Q und R sind kollinear.

Es gilt: Die Geradenbüschel durch B und D sind projektiv aufeinander bezogen (und zwar DA auf BA, DC auf BC, AE auf BE sowie DF auf BF). Bezeichnen wir den Schnittpunkt von AF und DE mit M, den von AB und EF mit N, so ergibt sich hieraus die projektive Abbildung: $APMF \underset{\wedge}{-} ERNF$.

Da F ein Fixpunkt dieser Projektivität ist, erhalten wir daraus die Perspektive: $APM \overset{Q}{\underset{\wedge}{=}} NRE$. Also liegt Q auf der Geraden PR. ◊

In Abbildung 8.12 sehen wir drei Möglichkeiten eines einbeschriebenen Sechsecks mit eingezeichneter Verbindungsgeraden. Dabei wird auch der Fall gezeigt, daß einer der Schnittpunkte auf der unendlich fernen Geraden liegt.

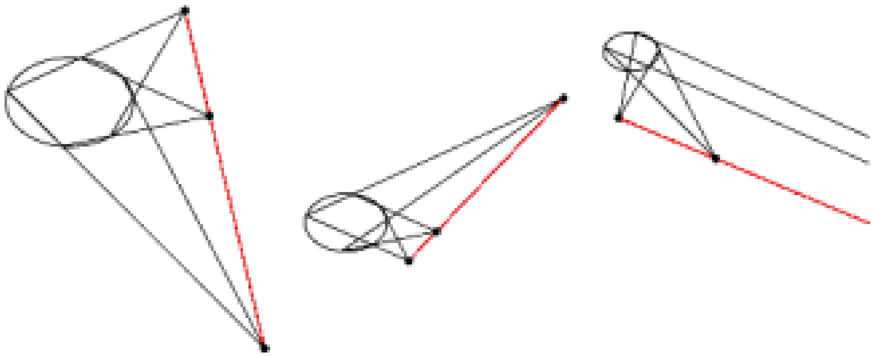

**Abb. 8.12** [WWW2]

# 9 Resümee und Ausblick

Ziel dieser Hausarbeit war es, verschiedene Zugänge zu dem Gebiet der Kegelschnitte vorzustellen. Auch wenn es in diesem Rahmen nicht machbar war, alle Details anzuführen, so haben wir dennoch die drei bedeutendsten Einstiege kennengelernt:

- Kegelschnitte als geometrische Kurven
- Kegelschnitte als algebraische Gleichungen
- Kegelschnitte in der projektiven Geometrie

Dabei haben wir diese drei Wege nicht isoliert voneinander beschritten, sondern zugleich die Beziehungen zu den zuvor formulierten Sätzen verdeutlicht.

Wir haben gesehen, daß die (zweidimensionalen) Kegelschnitte aus einem dreidimensionalen Doppelkegel durch Schneiden mit einer Ebene entstehen.

Es ist aber auch möglich, aus diesen Kegelschnitten wieder dreidimensionale Gebilde zu erzeugen, indem man sie um eine feste Achse rotieren läßt. Diese **Rotationsflächen** sind in Abbildung 9.1 dargestellt.

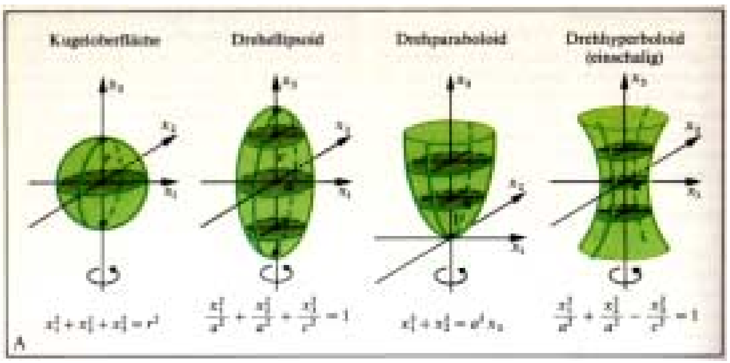


**Abb. 9.1** [ReSo]

Es lassen sich auch kompliziertere Gebilde herstellen, die sogenannten **Quadriken**. Dies sind Flächen 2. Ordnung, die durch eine quadratische Gleichung beschrieben werden können. Mehrere dieser Quadriken sind in Abbildung 9.2 zu sehen. Auch die Rotationsflächen stellen Spezialfälle von Quadriken dar.

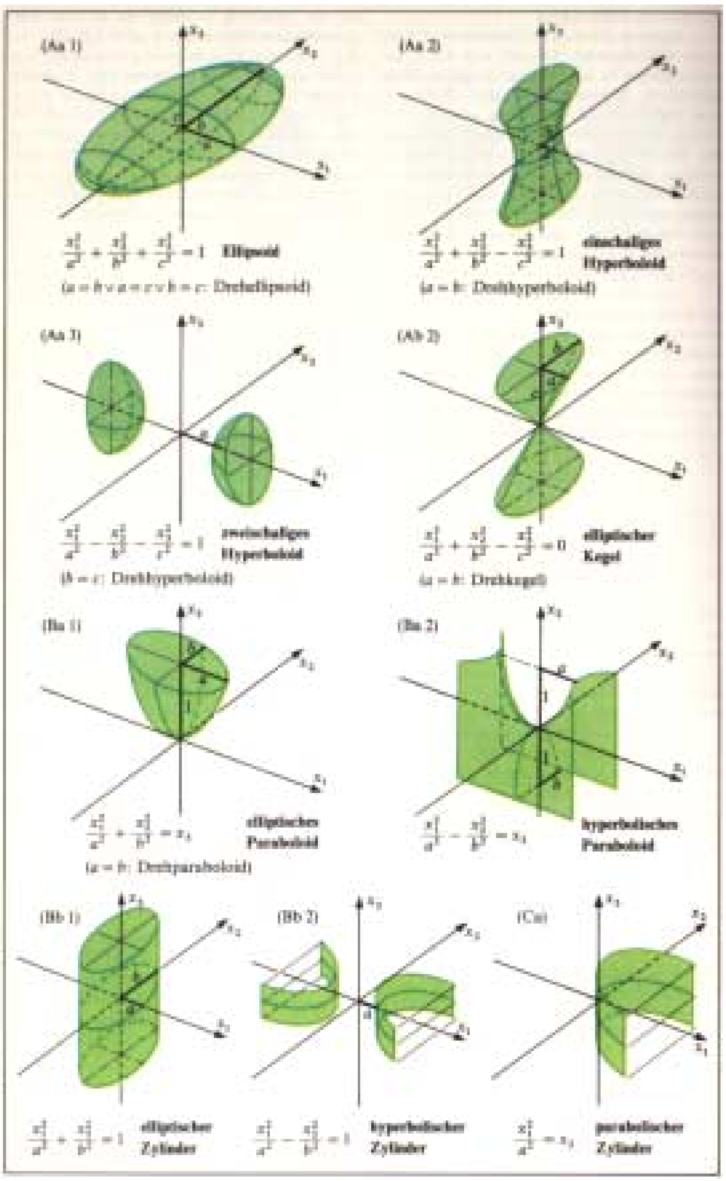

**Abb. 9.2** [ReSo]

Obwohl das Gebiet der Kegelschnitte bereits von den Griechen ausführlich behandelt worden ist, so gibt es dennoch immer neue Anwendungsmöglichkeiten, die den praktischen Nutzen demonstrieren:

- In der *Architektur* wurden zu allen Zeiten Kegelschnitte verwendet: Man denke zum Beispiel an die elliptische Form des Kolosseums in Rom oder des von Bernini (1598-1680) geschaffenen Petersplatzes, in dessen Mittelpunkt ein Obelisk und in dessen Brennpunkten zwei identische Springbrunnen stehen.
- In der *Physik* treten Kegelschnitte nicht nur in der Astronomie (Planetenbahnen), im makroskopischen Bereich (Interferenz von Wellen), sondern auch in mikroskopischen Gebieten (Bewegung der Elektronen in einem Atom) auf.
- In der *Medizin* zum Beispiel findet der Ellipsoid Verwendung bei der Zertrümmerung von Nierensteinen.

Auch die Zentralprojektion läßt sich praktisch sehr schön auf zwei unterschiedliche Arten verdeutlichen (nach Kapitel 7.2):

- Im ersten Fall betrachten wir Kegelschnitte als Schatten eines Kreises, den eine feste Lampe auf eine drehbare Ebene wirft. Dabei wird gut der Übergang Kreis => Ellipse => Parabel => Hyperbel deutlich, je nachdem wie stark die Ebene geneigt ist.
- Im zweiten Fall schließe die Ebene des Kreises und die Bildebene einen rechten Winkel ein, während man die Höhe der an einer Stange befestigten Lampe verändert.

Zum Abschluß möchte ich noch auf zwei exzellente Internet-Seiten verweisen:

1. http://xahlee.org/SpecialPlaneCurves_dir/ConicSections_dir/conicSections.html
   Auf dieser Seite finden sich vorwiegend Dateien für die beiden Computer-Programme „Mathematica“ und „Geometer´s Sektchpad“. Dabei werden nicht nur Kegelschnitte für verschiedene Exzentrizitäten simuliert, sondern es gibt auch Animationen für die Dandelinschen Kugeln (zweidimensional) oder den Satz von Pascal. Außerdem enthält diese Seite umfangreiche Links auf weiterführende Internet-Seiten.

2. http://www.camosun.bc.ca/~jbritton/jbconics.htm
   Diese Seite ist insbesondere für den Schulunterricht geeignet: Sie enthält für jede der drei Kegelschnittarten – Ellipse, Parabel und Hyperbel – mehrere praktische Anwendungsbeispiele. Diese sind nicht nur mit einem kurzen Text, sondern stets auch mit einem anschaulichen Bild dargestellt.

# Literaturverzeichnis


[Bac] H. Bachmann: *Vektorgeometrie*. Verlag Moritz Diesterweg, Frankfut am Main, $^{3}$1974.

[Beu] A. Beutelspacher und U. Rosenbaum: *Projektive Geometrie*. Vieweg-Verlag, Braunschweig, $^{1}$1992.

[Col] E. Colerus: *Vom Punkt zur vierten Dimension*. Rowohlt Taschenbuch-Verlag, Hamburg, $^{1}$1969.

[Cox1] H.S.M. Coxeter: *Reelle Projektive Geometrie der Ebene*. Oldenbourg-Verlag, München, $^{2}$1955.

[Cox2] H.S.M. Coxeter und S.L. Greitzer: *Zeitlose Geometrie*. Ernst Klett-Verlag, Stuttgart, $^{1}$1983.

[Cox3] H.S.M. Coxeter: *Introduction to Geometry*. John Wiley & Sons-Verlag, New York, $^{2}$1969.

[EcJeVo] R. Eckart, F. Jehle und W. Vogel: *Analytische Geometrie*. Bayerischer Schulbuch-Verlag, München, $^{2}$1988.

[Fis] G. Fischer: *Analytische Geometrie*. Vieweg-Verlag, Braunschweig, $^{2}$1979.

[GüSt] B. Gündel und H. Stocker: *Geometrie*. Verlag Moritz Diesterweg, Frankfurt am Main, $^{6}$1964.

[HiCoVo] D. Hilbert und S. Cohn-Vossen: *Anschauliche Geometrie*. Springer-Verlag, Berlin, $^{2}$1996.

[Hon] H. Honsberg: *Analytische Geometrie*. Bayerischer Schulbuch-Verlag, München, [2]1968.

[Mey] *Meyers Konversations-Lexikon – Eine Encyklopädie des allgemeinen Wissens*. Verlag des Bibliographischen Instituts, Leipzig, 1874-78.

[Ogi] C.S. Ogilvy: *Excursions in Geometry*. Dover-Verlag, New York, [2]1990.

[Pic] G. Pickert: *Analytische Geometrie*. Akademische Verlagsgesellschaft, Leipzig, [5]1964.

[Poc] F. Pochendorfer: *Geometrie*. Verlag Leitner & Co., Wels, [1]1961.

[ReSo] F. Reinhardt und H. Soeder: *dtv-Atlas zur Mathematik*, Band I. Deutscher Taschenbuch-Verlag, München, [2]1976.

[ReWoAt] Reidt, G. Wolff, H. Athen: *Elemente der Mathematik*, Band 4. Schroedel-Verlag, Hannover, [1]1967.

[Schei1] H. Scheid: *Elemente der Geometrie*. Spektrum Akademischer Verlag, Heidelberg, [2]1996.

[Schei2] H. Scheid: *Kegelschnitte*. Ernst Klett-Verlag, Stuttgart, [1]1988.

[Schu] H. Schupp: *Kegelschnitte*. BI-Wissenschaftsverlag, Zürich, [1]1988.

[WWW1] http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/

[WWW2] http://mathworld.wolfram.com/

Hiermit versichere ich, daß ich diese Wissenschaftliche Hausarbeit selbständig verfaßt habe. Ich habe keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel verwendet. Sämtliche Stellen, die benutzten Werken im Wortlaut oder dem Sinne nach entnommen sind, habe ich mit Quellenangaben kenntlich gemacht. Dies gilt auch für Skizzen, Zeichnungen und bildliche Darstellungen.

Friedberg in Hessen, am 20. Juni 2000

(Thomas Wilhelm Schwarzer)

Am Schluß möchte ich all jenen danken, die zum Gelingen dieser Hausarbeit beigetragen haben:

- Herrn Prof. Dr. rer. nat. Albrecht Beutelspacher für die erneut interessante Themenstellung;
- Herrn [redacted] für wertvolle Anregungen, Korrekturen und praktische Ideen;
- Meinem Kommilitonen Markus Englisch für das Korrekturlesen;
- Meinem Kameraden Uwe Schifbenger für das Scannen und Drucken; sowie
- Meinen Eltern für Kost und Logis.

*„What is sickness to the body of a knight-errant?*
*What matter wounds?*
*For each time he falls he shall rise again...“*